УДК 519.634

Посвящается светлой памяти А.П. Фаворского

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В БИОМЕХАНИКЕ СЕТОЧНО-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

© 2015 г. К. А. Беклемышева, А. В. Васюков, И. Б. Петров

(141700, М.о., Долгопрудный, Институтский пер., 9., МФТИ)

e-mail: amisto@yandex.ru, vasyukov@gmail.com, petrov@mipt.ru

Поступила в редакцию 26.02.2015 г.

В работе представлены результаты численного моделирования механических процессов, возникающих в биологических тканях при динамических воздействиях. Для решения системы уравнений механики деформируемого твердого тела используется сеточно-характеристический численный метод на нерегулярных расчетных сетках, учитывающий характеристические свойства определяющей системы уравнений в частных производных, обеспечивающий построение более корректных вычислительных алгоритмов на поверхности раздела сред и границах областей интегрирования. Библ. 41. Фиг. 10. Табл. 2.

Ключевые слова: математическое моделирование, параллельные алгоритмы, сеточно-характеристический метод, биомеханика, неструктурированные сетки.

DOI: 10.7868/S0044466915080049

На сегодняшний день медицина является, в основном, экспериментальной наукой, ориентированной на констатацию фактов и выдачу рекомендаций в части операционных или медикаментозных средств для ослабления патологических процессов. При этом экспериментальное изучение некоторых протекающих в организме процессов, в особенности патологических, нередко представляется затруднительным, например: феномен “противоудара” при черепно-мозговой травме (ЧМ), функции мениска в коленном суставе, механизмы воздействия на сердце при сильном ударе по грудной клетке.

Математическое моделирование как метод исследования в данном случае обладает рядом очевидных достоинств: небольшая стоимость численного эксперимента, широта доступного диапазона изменения основных параметров, полнота получаемой в результате картины динамики скоростей, напряжений и деформаций во всем объеме рассматриваемой системы, а также области повреждения тканей (см. [1]). Эффективность этого подхода подтверждается результатами его применения в различных областях науки и техники: авиации, машиностроении, космической промышленности, сейсморазведке (см., например, [2]–[5]). Применение математического моделирования для изучения физиологических и патологических процессов, происходящих в организме человека, позволяет получить новые качественные и количественные характеристики функционирования органов в различных условиях и протекающих в них нормальных и патологических процессов. Это необходимо для прогнозирования их развития, предсказания последствий патологий, выдачи медицинских рекомендаций и разработки новых принципов диагностики на ранних стадиях различных заболеваний. Можно привести некоторые примеры успешного использования математического и численного моделирования в медицине.

Так, одними из пионерских работ по моделированию функционирования миокарда были статьи [6], [7]. Моделирование кровотока рассматривалось в работах [8]–[11], роста опухоли – в [12], процессов дыхания – в [13], [14]. Результаты расчета динамических в сосудах процессов, происходящих в глазу человека при офтальмологических операциях по удалению катаракты (факоэмульсификация) приведены в [15], при операциях по удалению камней в почках (литотрипсия) – в [16]. Разработке математических моделей в иммунологии посвящена монография [17]. Исследованию распространения импульсов в волокнах Пуркинье (структуры кабельного типа,

проводящие импульсы в сердце) посвящены статьи [18]–[20], численному моделированию процесса залечивания ран посвящена работа [21]. Разработке реологических механико-математических моделей, описывающих поведение биологических тканей (биокомпозитов) посвящены статьи [22], [23], поведению нелинейных биологических сред – работа [24]. Применение математических методов в диагностике и анализе медицинской информации рассматривалось в работе [25], в травматологии (расчет последствий черепно-мозговых травм) – в [26]. Идеи подходов к математическому описанию психодиагностики изложены в [27], [28]. При разработке надежных математических моделей функционирования различных органов возникает ряд проблем. Наиболее сложной из них является экспериментальная верификация расчетных данных, так как соответствующие эксперименты практически отсутствуют. Более того, некоторые процессы в данной области изучать экспериментально крайне затруднительно, если вообще возможно. Нередко остаются открытыми вопросы о нахождении достоверных механических характеристик биологических тканей и о степени влияния индивидуальных различий на достоверность результатов моделирования. Решение данных проблем представляет собой актуальную задачу. Данная работа посвящена численному моделированию динамического воздействия на череп, грудную клетку и коленный сустав человека. При этом происходит распространение упругих волн в теле, и, в силу сложного внутреннего строения биологических тканей, итоговые области максимальных нагрузок формируются в результате интерференции прямых волн, а также отраженных и преломленных на внешних границ и поверхностях раздела сред.

Для математического моделирования волновых процессов в деформируемом твердом теле в приближении упругих малых деформациях и линейной упругости используется система динамических уравнений (уравнения движения и реологические соотношения) [29], [30]:

$$\begin{aligned} \rho \dot{v}_i &= \nabla_j \sigma_{ij} + f_i, \\ \sigma_{ij} &= \frac{1}{2}(\lambda \delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}))(\nabla_k v_l + \nabla_l v_k). \end{aligned} \tag{1}$$

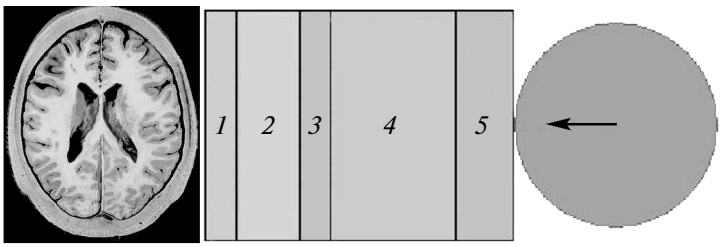
Здесь ρ – плотность среды, v_i – компоненты скорости смещения, σ_{ij}, ε_{ij} – компоненты тензоров напряжений и деформаций, ∇_j – ковариантная производная по j-й координате, f_i – массовые силы, действующие на единицу объема, δ_{ij} – символ Кронекера, λ и μ – параметры Ламе.

Систему (1) можно переписать в матричной форме:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A_x \frac{\partial u}{\partial x} + A_y \frac{\partial u}{\partial y} = f. \tag{2}$$

Здесь $u = \{v_x, v_y, \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}\}^{\mathrm{T}}$ – вектор искомых функций, x, y – независимые пространственные переменные, t – время, f – вектор правых частей, размерность которого равна размерности исходной системы, а выражения для компонент матриц A_x и A_y зависят от выбора реологических свойств исследуемой среды.

Для решения задачи (2) используется метод расщепления по направлениям. Спектральное исследование матриц A_x и A_y проведено в [31], [35], где показано, что для них существует полный набор собственных значений и собственных векторов, и приведены аналитические выражения. При переходе к инвариантам Римана система распадается на шесть одномерных уравнений. Значения инвариантов Римана переносятся с временно́го слоя n на временно́й слой $n + 1$ вдоль характеристических кривых (см. [2]). В данной работе используются неструктурированные треугольные сетки (см. [2], [3], [26]). В ходе расчета для каждой характеристики, выпущенной из точки на новом временно́м слое, по углу наклона λ и шагу по времени τ определяется ячейка сетки на старом временно́м слое, в который попала характеристика. В точке пересечения характеристики со старым временны́м слоем интерполируется значение соответствующего инварианта [32]. Значение инварианта переносится в точку на новом временно́м слое. После того, как описанным образом найдены все шесть инвариантов Римана, можно найти в ней исходные переменные u. Гибридная схема использует две опорные схемы с интерполяцией первого и второго порядка, переключаясь в зависимости от локальной гладкости численного решения (см. [33], [34]). В случае, когда узел находится на границе расчетной области, рассматриваемая система уравнений имеет ровно две (см. [31], [35]) выводящие из области интегрирования характеристики, и для корректной постановки задачи требуется задание двух граничных условий для каждого граничного узла сетки: свободная граница ($\sigma_\tau = \sigma_n = 0$), заданная внешняя сила ($\sigma_\tau = \sigma_{\tau 0}$, $\sigma_n = \sigma_{n0}$), заданная скорость границы ($v = v_0$). Здесь σ_n и σ_τ – нормальное и тангенциальное напряжения в



Фиг. 1. Постановка задачи. Слева – трансверсальное сечение головы человека, справа – вид расчетной области: *1* – мозговое вещество, *2* – ликвор, *3* – внутренний слой компактной костной ткани, *4* – слой губчатой костной ткани, *5* – внешний слой компактной костной ткани.

граничной точке, σ_{n0} и $\sigma_{\tau 0}$, u_0 – заданные извне нормальное и тангенциальное напряжения и вектор скорости в точке границы. Расчет контактной границы между двумя телами в целом аналогичен расчету границы тела. Однако в точке контакта присутствуют два узла – по одному из каждого контактирующего тела, и уравнения связей должны задавать 4 условия. В данной работе используется ряд контактных условий: скольжение тел друг относительно друга ($v_n = \tilde{v}_n, \sigma_n = \tilde{\sigma}_n, \sigma_\tau = \tilde{\sigma}_\tau = 0$) и слипание тел ($v_n = \tilde{v}_n, v_\tau = \tilde{v}_\tau$). Здесь σ_n и σ_τ – нормальное и тангенциальное напряжения в граничной точке. Символы с волной относятся к первому телу, без волны – ко второму.

Из нейрохирургической практики известно, что области поражения мозга при черепно-мозговой травме не всегда совпадают с областями, прилежащими к месту удара (см. [26], [36]). По результатам анализа ряда работ можно сделать вывод о том, что большинство исследовательских работ в области моделирования ЧМТ было проведено за рубежом с применением различных вариаций методов конечных элементов (МКЭ); обзор работ, посвященных численному исследованию ЧМТ, выполнен в [1], [26]. Несмотря на то, что моделирование головного отдела человека с помощью МКЭ в последние десять лет интенсивно развивается, оно еще далеко от того, чтобы иметь возможность объяснить механизмы повреждения мозга и предсказать последствия ЧМТ. Было проведено некоторое количество сравнительных исследований с использованием различных контактных условий (см. [37]). Все они приводят к заключению, что эффект ударного воздействия на голову человека чувствителен к способу моделирования контактного взаимодействия череп-мозг. Сеточно-характеристические численные методы, ориентированные на моделирование волновых процессов, в том числе с наличием поверхностей раздела сред в области интегрирования, применялись для изучения ЧМТ в [1], [26], [38]. В работах [38]–[40] показано, что зоны повреждений мозга гораздо лучше коррелируют с зонами максимальных сдвиговых напряжений, чем с зонами сжатий и растяжений. В задаче о ЧМТ можно выделить несколько характерных особенностей, затрудняющих моделирование всей системы череп-мозг целиком: большое различие в механических свойствах компонентов биологической системы (например, модули Юнга костной ткани и мозгового вещества различаются на порядки), неоднородность внутреннего строения отдельных компонентов (кости, к примеру, состоят из двух типов ткани – компактной и губчатой, которые заметно различаются по своим свойствам), большое количество компонентов системы и их сложная геометрия. В данной задаче исследовались волновые процессы, происходящие в покровах мозга при динамическом нагружении для различных моделей стенки черепа. Использование многокомпонентной модели черепа, явно выделяющей три слоя костной ткани, при решении задачи о ЧМТ приводит к некоторым проблемам. Прежде всего, введенная многокомпонентная модель требует заметного измельчения расчетной сетки, что при курантовском шаге по времени приводит к существенному увеличению времени расчета. Помимо этого, механические параметры отдельных компонент системы не известны точно и поэтому неясно, насколько сильно погрешность их измерения скажется на итоговой картине. Перед применением многокомпонентной модели разумно рассмотреть, насколько ее введение влияет на различные стадии процесса, и понять, когда ее использование разумно, а когда будет слабо сказываться на итоговых результатах.

Рассматривались две постановки задачи. В первой применялась многокомпонентная модель: череп состоит из трех однородных слоев костной ткани (внешнего из компактной, промежуточного из губчатой и внутреннего из компактной), во-вторых учитывалось наличие внутричерепной жидкости (ликвор) и мозгового вещества (см. фиг. 1). Для сравнения использовалась упрощенная модель, в которой слои *3*, *4*, *5* (фиг. 1) были объединены в один слой, состоящий их ком-

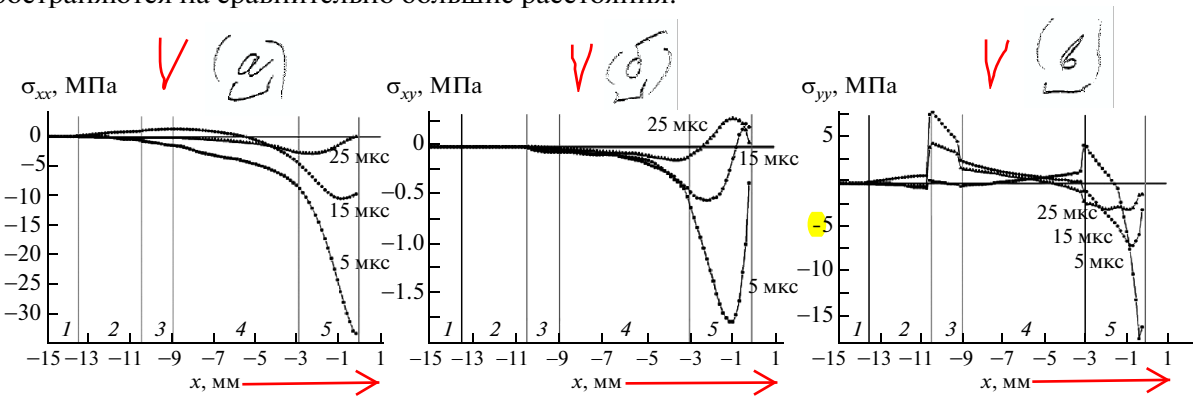
Таблица 1. Упругие характеристики слоев и ударника

Компонент	λ, ГПа	μ, ГПа	ρ, кг/м^3
Компактная костная ткань	7900	5270	1.60
Губчатая костная ткань	3975	2650	1.50
Ликвор	1700	0.001	1.00
Мозговое вещество	1700	0.23	1.02

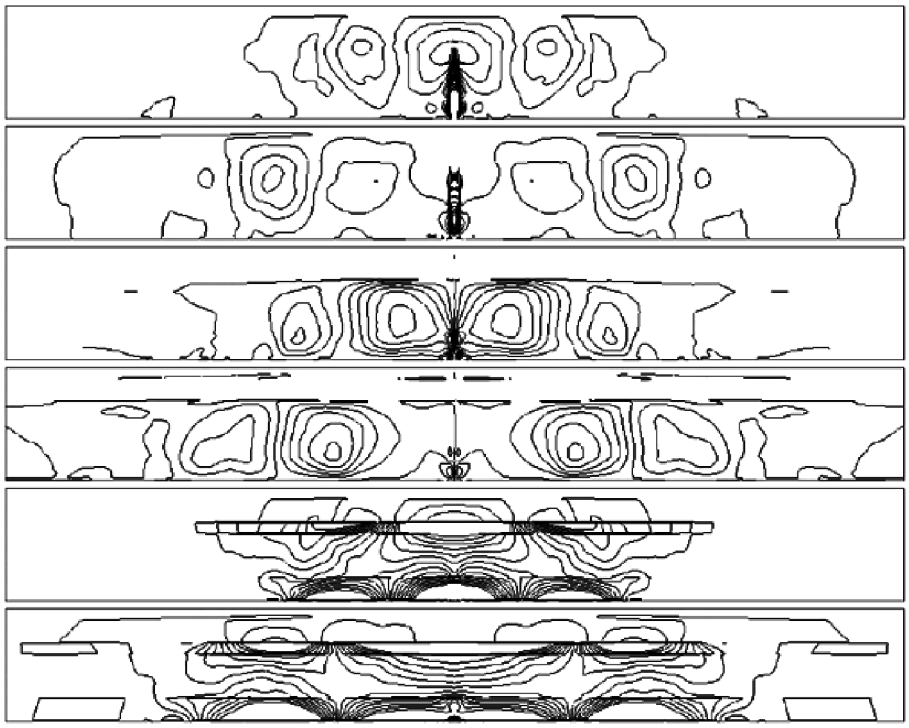
пактной костной ткани. Моделировалось воздействие низкоскоростного удара шариком по черепу. Рассматривалась прямоугольная область, представляющая собой небольшую часть покровов мозга и, собственно, мозгового вещества (модельная задача, фиг. 1). На правой границе, соответствующей внешней стенке черепа, ставилось условие свободной границы (нулевые касательные и нормальные напряжения). На трех остальных границах, которые, на самом деле, свободными не являются, также ставилось условие свободной границы, но при этом геометрия области выбиралась таким образом, чтобы за рассматриваемое время возмущение не успело дойти до этих границ. Расчет различных слоев костной ткани черепа, внутричерепной жидкости и мозгового вещества производился сквозным образом.

Реологические свойства компонентов биокомпозита приведены в табл. 1 (см. [27]). Поведение костного материала моделировалась как изотропная линейноупругая сплошная среда со средними свойствами пластинчатой и губчатой кости. Моделировался удар шариком из жесткого пластика сантиметрового диаметра, налетающим со скоростью 3 м/с перпендикулярно стенке черепа. Такой удар не приводит к травмам, но принципиальная картина волновых процессов не зависит от скорости шарика, поэтому ее можно выбрать малой для удобства расчетов. Шарик и череп считались на двух разных сетках. Контактная граница между ними выделялась явным образом, на ней ставились условия свободного скольжения – равенство нормальных напряжений и нормальных компонент скорости и нулевые касательные напряжения.

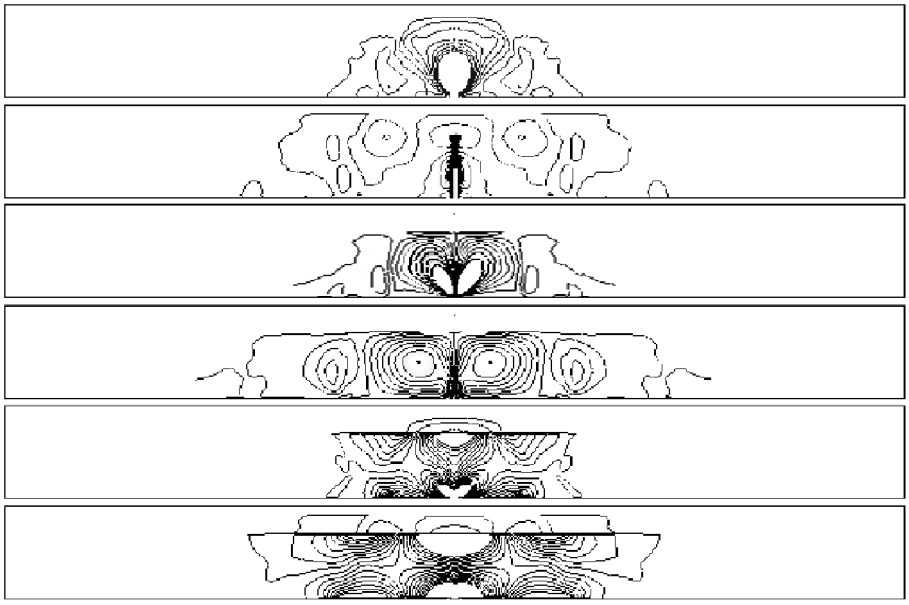
На фиг. 2 представлены одномерные графики зависимости напряжений от координаты для многокомпонентной модели. Ось направлена по внешней нормали, ноль соответствует поверхности черепа. Видно, что покровы мозга уменьшают напряжения во много раз. Сдвиговые напряжения полностью снимаются ликвором, нормальные напряжения ослабляются в стенке черепа на порядки. Отдельно стоит отметить, что нормальные напряжения, действующие вдоль оси y, концентрируются в слоях компактной костной ткани (фиг. 2в). На фиг. 3 изображены изолинии напряжений в различные моменты времени. Эффективности покровов мозга как защитной конструкции также способствует то, что коэффициенты Ламе для мозгового вещества на порядки меньше, чем для остальных компонентов системы, при лишь небольших различиях плотности. Это приводит к тому, что возмущения в черепе и ликворе распространяются намного быстрее, чем в мозге. В результате диссипация возмущений в покровах мозга происходит гораздо быстрее, чем их проникновение в мозг. На фиг. 3 видно, что за время от 15 мкс до 25 мкс после удара возмущения практически не заходят вглубь мозга, а по ликвору и черепу они за это же распространяются на сравнительно большие расстояния.



Фиг. 2. Зависимость напряжения от координаты: *1* – мозговое вещество, *2* – ликвор, *3* – внутренний слой компактной костной ткани, *4* – слой губчатой костной ткани, *5* – внешний слой компактной костной ткани; а – отражение от первой контактной границы, б – прохождение второй контактной границы, в – прохождение возмущения в ликвор.

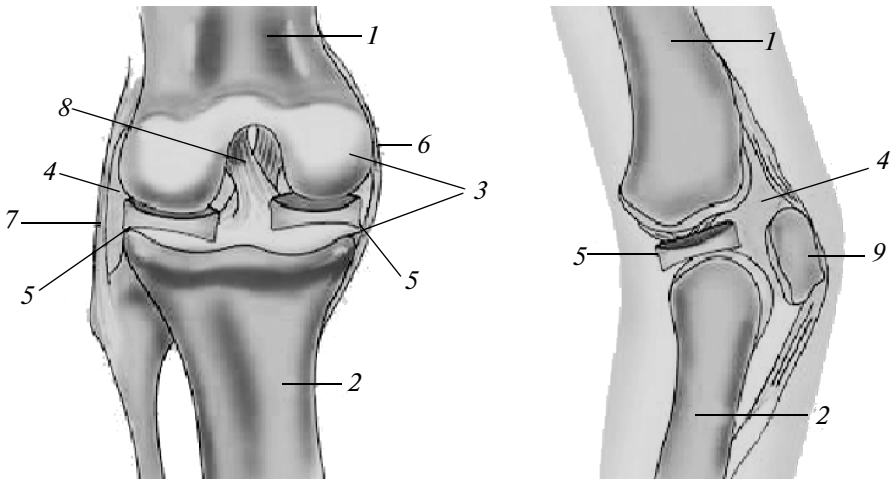


Фиг. 3. Многокомпонентная модель, изолинии напряжений. Ось x направлена вверх, ось y – влево. Сверху вниз: σ_{xx} при $t = 15$ мкс, σ_{xx} при $t = 25$ мкс, σ_{xy} при $t = 15$ мкс, σ_{xy} при $t = 25$ мкс, σ_{yy} при $t = 15$ мкс, σ_{yy} при $t = 25$ мкс. Шарик налетает снизу.

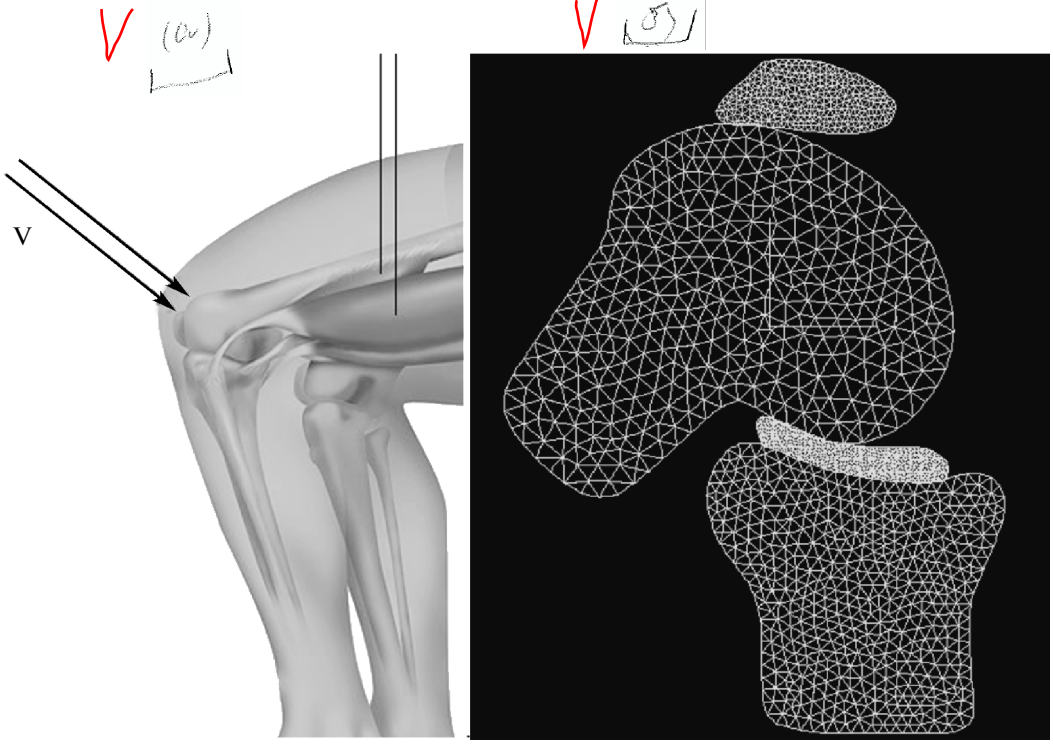


Фиг. 4. Упрощенная модель, изолинии напряжений. Ось x направлена вверх, ось y – влево. Сверху вниз: σ_{xx} при $t = 15$ мкс, σ_{xx} при $t = 25$ мкс, σ_{xy} при $t = 15$ мкс, σ_{xy} при $t = 25$ мкс, σ_{yy} при $t = 15$ мкс, σ_{yy} при $t = 25$ мкс. Шарик налетает снизу.

На фиг. 4 изображены изолинии напряжений в различные моменты времени, полученные с использованием упрощенной модели. При сравнении с фиг. 3 видно, что на начальной стадии, пока картина еще носит ярко выраженный волновой характер, распределение напряжений в слу-



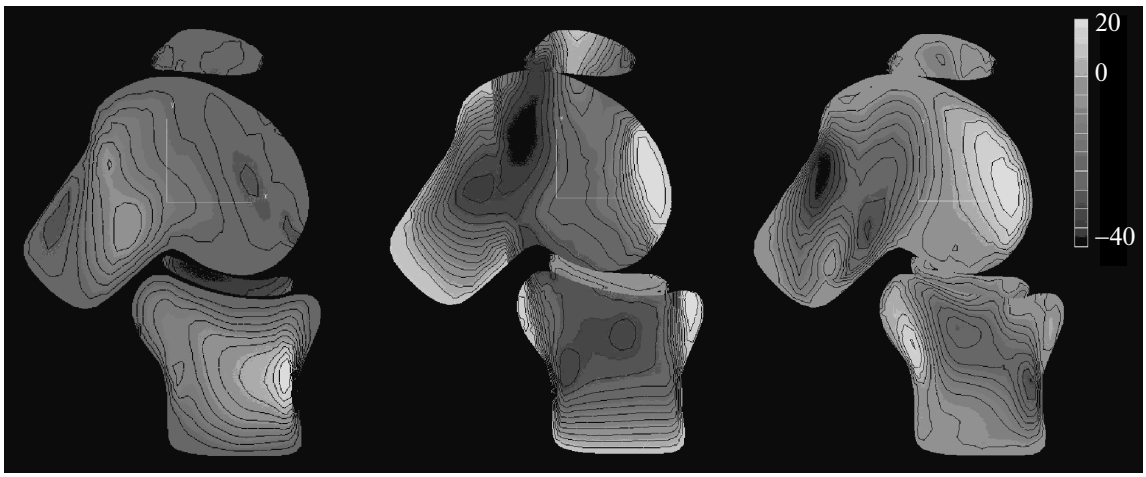
Фиг. 5. Строение коленного сустава: *1* – бедренная кость, *2* – большая берцовая кость, *3* – хрящи, *5* – внутренний и внешний мениски, *6* – внешняя связка, *7* – внутренняя связка, *8* – крестообразная связка, *9* – надколенник.



Фиг. 6. Согнутый коленный сустав, а – схема, б – расчетная сетка.

чае использования разных моделей покровов мозга сильно отличается. Большее количество контактных границ в многокомпонентной модели определяет существенно более сложную волновую картину.

Колени – очень уязвимая часть организма человека. При этом отдельное внимание при рассмотрении повреждений коленного сустава следует уделить мениску. Заметное изнашивание или, тем более, разрыв мениска делает работу коленного сустава практически невозможной. Кроме того, мениск плохо снабжается кровью, поэтому сам по себе он не заживает и не восстанавливается. Мениск выполняет не только функцию амортизатора, но и заполняет пространство между костями. Колено представляет собой сложную механическую структуру (фиг. 5), поэтому процессы повреждения, протекающие в нем, тоже сложны. С помощью численного моделирования можно воспроизвести травмы, характер их развития. Также возможно численное воспро-



Фиг. 7. Распределение вертикальной компоненты тензора напряжения (МПа) по коленному суставу, а – слабый удар (3 м/с), б – сильный удар (9 м/с), начальный момент удара, в – сильный удар (9 м/с), завершающая стадия удара.

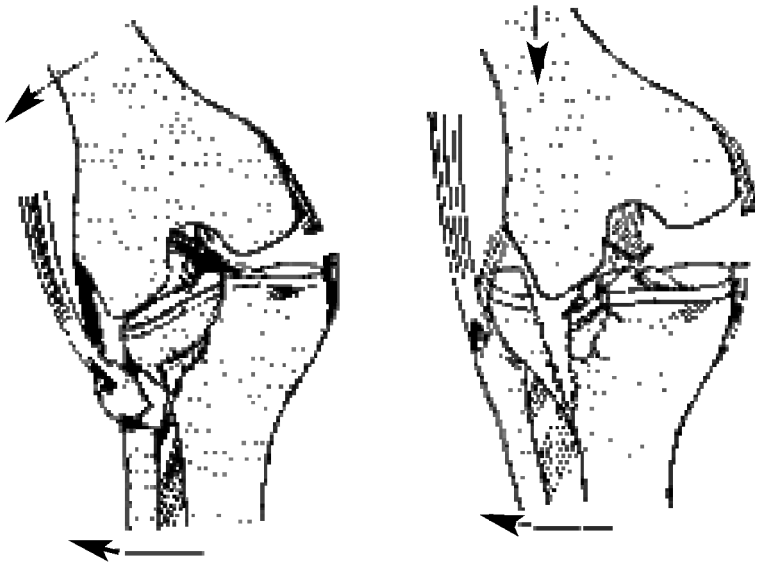
изведение хирургической операции (например, пересадки мениска) или подбор материала для имплантанта. В рамках двумерной задачи была рассмотрена модель, включающую берцовую кость, бедренную кость коленную чашечку и мениск. В рамках данной работы рассматривается модель согнутого коленного сустава (фиг. 6а), включающая берцовую кость, бедренную кость, коленную чашечку и мениск. Соответствующая расчетная сетка приведена на фиг. 6а. Значения параметров биологических сред приведены в табл. 2.

В первом расчете скорость соударения составляла 3 м/с, направление удара составляло 45 градусов с горизонталью. Во втором расчете скорость составляла 9 м/с. Распределение напряжений в первом расчете показано на фиг. 7а. При этой скорости удара напряжения, возникающие в кости, значительно меньше предела прочности костной ткани. Однако напряжения сжатия и растяжения в мениске достигают 1–2 МПа, что согласно [41] может вызывать повреждения мениской ткани. Сдвиговые напряжения не превышают 1 МПа, что не представляет опасности ни для костной, ни для мениской тканей. При большей скорости (фиг. 7б, в) в кости возникают напряжения сжатия до величин порядка сотни МПа, что не превышает предела прочности костной ткани. Однако напряжение растяжения костная ткань выдерживает значительно хуже, при нагрузке растяжения порядка 50–70 МПа уже могут возникать переломы. Области максимальных растяжений на рисунке 8 показаны белым, в этих областях возможны переломы. Одной из характерных травм при ударе по коленному суставу является перелом мыщелка большеберцовой кости. Механизм формирования данной травмы схематически изображен на фиг. 8. Видно, что области повреждений с хорошей точностью совпадают с зонами максимальных растягивающих напряжений, полученными в расчете.

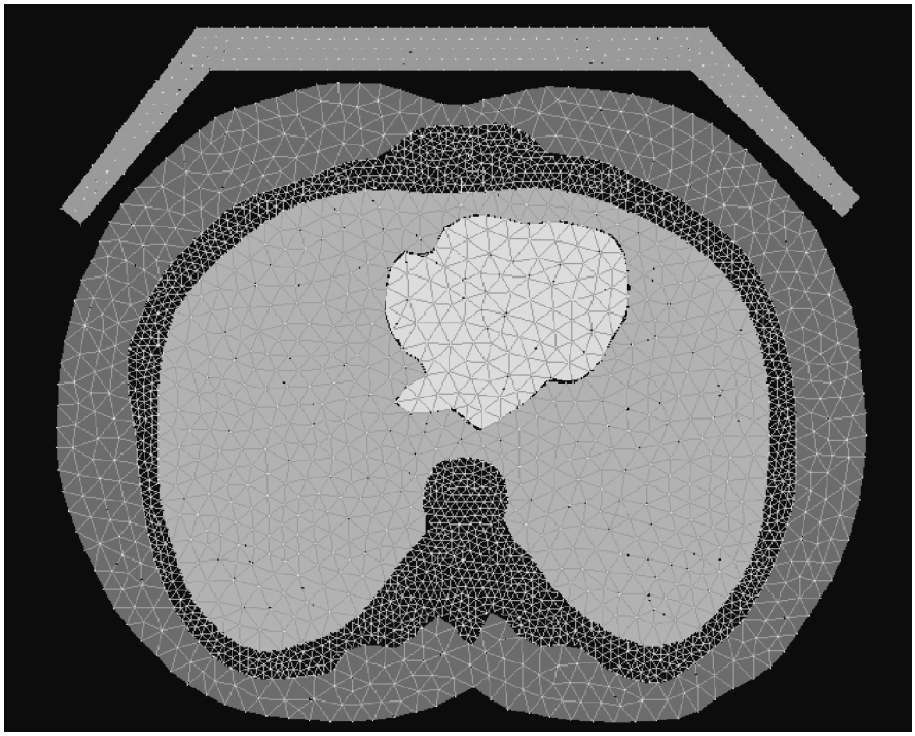
В медицинской практике известны случаи внезапной остановки сердца молодых спортсменов в результате низкоинтенсивного непроникающего воздействия тупого предмета на прекардиальную область (в основном, не очень сильные удары в грудь хоккейной шайбой, на ринге, бейсбольным мячом). Патогенез этих смертей не до конца изучен. Вероятно, удар в грудь попадает в уязвимый период сердечного цикла и вызывает желудочковую тахикардию или фибрилляцию желудочков. Подобные травмы приводили к летальному исходу даже в тех случаях, когда на спортсменах присутствовала защитная амуниция. Следовательно, существующие на сегодняшний день средства защиты неэффективны при определенных типах воздействия. Соответственно, требуется исследование возможных факторов остановки сердца при таких воздействиях, что

Таблица 2. Механические характеристики в задаче о коленном суставе

Компонент	λ, ГПа	μ, ГПа	ρ, кг/м^3
Костная ткань	2100	2700	1.60
Мягкие ткани мениска	100	70	1.10

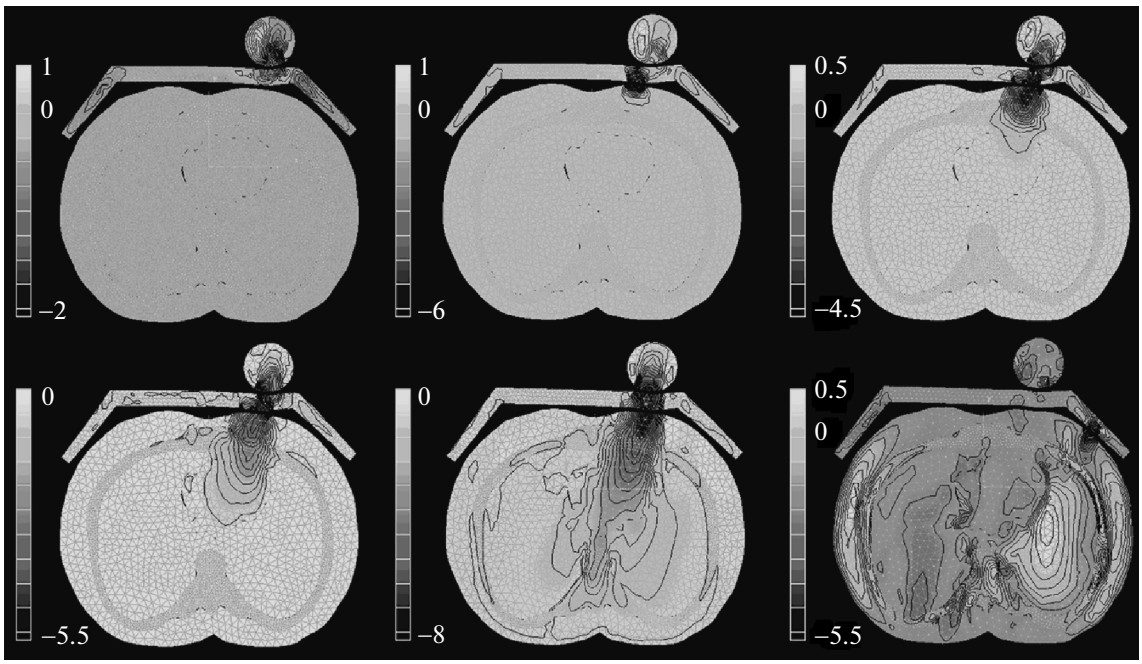


Фиг. 8. Механизм повреждения при двух типах перелома наружного мыщелка больше берцовой кости.



Фиг. 9. Модель грудной клетки: мышечная ткань, костная ткань ребер, мягкие ткани внутренних органов, сердечная мышца.

позволит разработать новые типы протекторов грудной клетки. В рамках данной работы рассматривается модель грудной клетки, включающая сердце, слой мягких тканей внутренних органов, ребра и слой мягких тканей мышц (фиг. 9). Параметры костной ткани и мягких тканей приведены в табл. 2. Контактное условие на границах между тканями грудной клетки – полное слипание. Контактное условие между тканями грудной клетки и защитной амуницией – свободное скольжение. Рассматривается удар под углом 45 градусов со скоростью 4 м/с.



Фиг. 10. Распределение вертикальной компоненты тензора напряжения (МПа) по коленному суставу. Слева направо: прохождение волны через защитную конструкцию, проникновение возмущения в мягкие ткани, прохождение возмущения через костную ткань, прохождение возмущения в область сердечной мышцы, момент максимальной концентрации напряжений в области сердечной мышцы, завершающая стадия соударения (отскок ударника).

Из расчета видно (см. фиг. 10), что, несмотря на защитную конструкцию, в области сердца возникают напряжения сжатия, опасные для мышцы сердца. Для решения проблемы имеет смысл продолжить моделирование различных существующих моделей защитных конструкций (в том числе, композитных) с целью поиска наиболее эффективной из них. Аналогично (перебором многих вариантов) может решаться задача оптимизации формы и материала при разработке новых протекторов грудной клетки. Также можно получить информацию о пространственном распределении давления на сердечно-сосудистую систему, необходимую для моделирования кровотока.

Таким образом, в данной работе представлены результаты расчетов по динамическому нагружению различных частей тела человека: черепа, коленного сустава, грудной клетки с защитой (задачи травмотологии). Для решения каждой из поставленных задач были сформулированы многокомпонентные системы сложной геометрии, основанные на реальных рентгеновских и МРТ снимках, получены распределения напряжений, скоростей смещения в теле человека, вероятной области повреждения биотканей. Для численного решения травматологических задач был реализован сеточно-характеристический метод на нерегулярных расчетных сетках. Поставки задач согласовывались со специалистами Военного госпиталя им. Н.Н. Бурденко, Института скорой помощи имени Н.В. Склифосовского.

Методами численного моделирования с использованием указанных моделей было изучено влияние сложности модели и механических характеристик составляющих систем на распространение волн и распределение нагрузок. Механические характеристики биологических сред выбирались наиболее соответствующими реальным. Выполнен качественный и количественный анализ полученных волновых картин и распределений напряжений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Петров И.Б.* О численном моделировании биомеханических процессов в медицинской практике // Информационные технологии и вычисл. системы. 2003. № 1–2. С. 102–111.

2. *Магомедов К.М., Холодов А.С.* Сеточно-характеристические численные методы. М.: Наука, 1988.

3. *Васюков А.В., Беклемышева К.А., Ермаков А.С., Дзюба А.С., Голован В.И.* Численное моделирование динамических процессов при низкоскоростном ударе по композитной стрингерной панели // Математическое моделирование. 2014. Т. 26. С. 95–110.
4. *Белоцерковский О.М.* Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Физматлит, 1994.
5. *Квасов И.Е., Петров И.Б.* Численное моделирование волновых процессов в геологических средах в средах в задачах сейсморазведки с помощью высокопроизводительных ЭВМ // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52. № 2. С. 330–341.
6. *Белоцерковский О.М., Виноградов А.В., Шебеко С.В.* Постановка задачи анализа клинического течения инфаркта миокарда. Компьютерные модели и прогресс медицины. М.: Наука, 2001. С. 28–91.
7. *Глазунов А.С.* Методы вычисления функционального состояния миокарда для выявления скрытой угрозы внезапной смерти от сердечной недостаточности на основе компьютерной кардиографии. Компьютерные модели и прогресс медицины. М.: Наука, 2001. С. 101–114.
8. *Холодов А.С., Евдокимов А.В.* Методы расчета глобального кровотока в организме человека с использованием гетерогенных вычислительных моделей. Медицина в зеркале информатики. М.: Наука, 2008. С. 124–144.
9. *Ашметков И.В., Буничева А.Я., Лукшин В.А., Кошелев В.Б., Мухин С.И., Соснин Н.В., Фаворский А.П., Хруленко А.Б.* Математическое моделирование кровообращения на основе программного комплекса CVSS. Медицина в зеркале информатики. М.: Наука, 2008. С. 194–218.
10. *Гурия Г.Т., Лобанов А.И., Старожилова Т.К.* Моделирование роста оторвавшегося тромба в пристеночном потоке. Медицина в зеркале информатики. М.: Наука, 2008. С. 250–263.
11. *Василевский Ю.В., Симаков С.С., Саламатова В.И., Иванов И.В., Добронравова Т.* Вопросы численного моделирования потока крови в сети сосудов с патологиями // Российский журнал численного анализа и математического моделирования. 2011. Т. 26. № 6. С. 605–622.
12. *Колобов А.В., Лобанов А.И., Пименова Т.П., Полежаев А.А., Соляник Г.И.* Влияние пространственной гетерогенной среды на рост и инвазию опухоли. Анализ методами математического моделирования. Медицина в зеркале информатики. М.: Наука, 2008. С. 188–223.
13. *Холодов А.С.* Некоторые динамические модели внешнего дыхания и кровообращения с учетом их связанности и переноса веществ. Компьютерные модели и прогресс медицины. М.: Наука, 2001. С. 127–163.
14. *Дьяченко А.И.* Исследование однокомпонентной модели механики легких // Рига. Медицинская биомеханика. 1986. Т. 1. С. 147–152.
15. *Балабановский Н.Н., Бубнов А.В., Обухов А.С., Петров И.Б.* Расчет динамических процессов в глазу при лазерной экстракции катаракты // Матем. моделирование. 2003. Т. 15. С. 37–44.
16. *Жуков Д.С., Петров И.Б., Тормасов А.Г.* Численное и экспериментальное изучение разрушения твердых тел в жидкости // Известия АН СССР, серия Механ. твердого тела. 1991. С. 183–190.
17. *Марчук Г.И.* Математические модели в иммунологии. М.: Наука, 1985.
18. *Асланида О.В., Морнев О.А.* Эхо в возбудимых волокнах сердца // Матем. моделирование. 1999. Т. 11. № 9. С. 3–22.
19. *Пашков Р.А., Петров И.Б.* Моделирование распространения импульсов в волокнах Пуркинье // Обработка информации и моделирование. 2002. С. 171–181.
20. *Асланида О.В., Морнев О.А.* Могут ли нервные импульсы отражаться? // Письма в ЖЭТФ. 1997. Т. 65. С. 553–558.
21. *Пашков Р.А.* Численное моделирование контрактации кожной раны // Процессы и методы обработки информации. 2005. С. 194–200.
22. *Регирер С.А.* Лекции по биологической механике. М.: Изд-во МГУ, 1980.
23. *Кондауров В.И., Никитин А.В.* Конечные деформации вязкоупругих мышечных тканей // Прикл. матем. и механ. 1987. Т. 51. В. 3. С. 443–452.
24. *Andrey A. Polezhaev, Ruslan A. Pashkov, Alexey I. Lobanov, Igor B. Petrov.* Spatial patterns formed by chemitactic bacteria Escheribia coli // Intern. J. Development Biology. 2006. V. 50. P. 309–314.
25. *Журавлев Ю.И., Петров И.Б., Рязанов В.В.* Дискретные методы диагностики и анализа медицинской информации // Медицина в зеркале информатики. 2008. С. 5–21.
26. *Агапов П.И., Белоцерковский О.М., Петров И.Б.* Численное моделирование последствий механического воздействия на мозг человека при черепно-мозговой травме // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 2006. Т. 46. № 9. С. 1711–1720.
27. *Клюжев В.М., Лисицкий А.В., Кутанина О.М.* На пути к объективизации методов психодиагностики и психореакции // Компьютер и мозг. Новые технологии. 2005. С. 313–318.
28. *Колядин Д.В., Лисицкий А.В., Петров И.Б.* О применении методов распознавания для определения психологических характеристик личности // Медицина в зеркале информатики. 2008. С. 34–46.
29. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975.
30. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1970. С. 143.

31. *Челноков Ф.Б.* Явное представление сеточно-характеристических схем для уравнений упругости в двумерном и трехмерном пространствах // Матем. моделирование. 2006. Т. 18. № 6. С. 96–108.
32. *Петров И.Б., Фаворская А.В.* Библиотека интерполяции высоких порядков на неструктурированных треугольных и тетраэдральных сетках // Информационные технологии. 2011. № 9. С. 30–32.
33. *Федоренко Р.П.* Введение в вычислительную физику. М.: Изд-во Моск. физ.-техн. ин-та, 1994.
34. *Петров И.Б., Холодов А.С.* О регуляризации разрывных численных решений уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1984. Т. 24. № 8. С. 1172–1188.
35. *Петров И.Б., Холодов А.С.* Численное исследование некоторых динамических задач механики деформируемого твердого тела сеточно-характеристическим методом // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1984. Т. 24. № 5. С. 722–739.
36. *Агапов П.И., Белоцерковский О.М., Климов И.А., Клюжев В.М., Петров И.Б.* Системный подход к восстановлению мотивационно-эмоциональной формы человека при черепно-мозговой травме. Опыт союза медицины и информатики. Боевой стресс: механизмы стресса в экстремальных условиях // Сб. научн. трудов симпозиума. Посвященных 75-летию Гос. НИИ военной медицины. Под ред. И.Б. Уманова. 2005. С. 150–152.
37. *Claessens M.H. A.* Finite element modeling of the human head under impact conditions: Ph.D. thesis. Eindhoven University of Technology. 1997.
38. *Bolotskikh Y.V., Vasyukov A.V., Petrov I.B.* Modeling of dynamic problems in biomechanics // Math. Model. Nat. Phenom. 2011. V. 6. № 7. P. 70–81.
39. *Zhou C., Khalil T.B., King A.I.* A new model comparing impact responses of the homogeneous and inhomogeneous human brain // 39th Stapp Car Crash Conf. Society of Automotive Engng. 1995. P. 121–137.
40. *Chu C., Lin M., Huang H.M., Lee M.C.* Finite element analysis of cerebral contusion // J. Biomechanics. 1994. V. 27. P. 187–194.
41. *Бегун П.И., Афонин П.Н.* Моделирование в биомеханике. М.: Высшая школа. 2004.