ВРЕМЯ И ПАМЯТЬ

Асимптотическая сложность алгоритмов
Время и память как ресурсы

К. Владимиров, Intel, 2018
mail-to: konstantin.vladimirov@gmail.com

Снова алгоритм F

- Как оценить время работы этой функции?

```
unsigned long long fib (unsigned n) {
  unsigned long long first = 0ull;
  unsigned long long second = 1ull;
  int idx;
  if (n == 0) return 0ull;
  for (idx = 2; idx <= n; ++idx) {
    unsigned long long tmp = second;
    second = second + first;
    first = tmp;
  }
  return second;
}
```

Снова алгоритм F

- Самый очевидный способ – подсчитать

```
unsigned long long fib (unsigned n) {
  unsigned long long first = 0ull;      // ta + te
  unsigned long long second = 1ull;     // ta + te
  int idx;                              // ta
  if (n == 0) return 0ull;              // tb
  for (idx = 2; idx <= n; ++idx) {      // ta + n * (tc + tp) + tb
    unsigned long long tmp = second;    // n * (ta + te)
    second = second + first;            // n * (tp + te)
    first = tmp;                        // n * te
  }                                     // n * tb
  return second;                        // tb
}                                       // Итого: k1 + n*k2
```

Обсуждение

- Итак, время исполнения алгоритма F составляет $k_1 + k_2 n$
- Здесь n это номер вычисленного числа Фибоначчи
- От чего зависят значения k_1 и k_2?

Обсуждение

- Итак, время исполнения алгоритма F составляет $k_1 + k_2 n$
- Здесь n это номер вычисленного числа Фибоначчи
- От чего зависят значения k_1 и k_2?
  - Быстродействие компьютера (laptop vs supercomputer)
  - Архитектура микропроцессора, в частности насколько дорогой branch и какие там внутри детали реализации подсистем памяти и арифметики/логики
  - Качество компилятора и линкера (насколько оптимизирован код)

Обсуждение

- Итак, время исполнения алгоритма F составляет $k_1 + k_2 n$
- Здесь n это номер вычисленного числа Фибоначчи
- От чего зависят значения k_1 и k_2?
  - Быстродействие компьютера (laptop vs supercomputer)
  - Архитектура микропроцессора, в частности насколько дорогой branch и какие там внутри детали реализации подсистем памяти и арифметики/логики
  - Качество компилятора и линкера (насколько оптимизирован код)
- На практике мы часто не знаем и знать не можем большую часть этих параметров
- Но мы всегда знаем наш **главный параметр** n

Снова наивный подход

- Для примера оценим выполнение при наивном подходе

```
unsigned long long fib (unsigned n) {
  if (n == 0) return 0ull;              // t_a φ^n
  if (n <= 2) return 1ull;              // t_a φ^n
  return fib(n - 1) + fib(n - 2);       // (t_b + t_c) φ^n
}
```

- Имеем ровно $\frac{1}{\sqrt{5}}\phi^n$ вызовов функции и общее время $k_3\phi^n$
- Первая мысль при сравнении $k_1 + k_2 n$ против $k_3\phi^n$ это: а есть ли вообще разница какие значения имеют k_1, k_2, k_3?
- При достаточно большом n, всегда $k_1 + k_2 n < k_3\phi^n$

O-нотация

- Базовая интуиция, что при достаточно большом n, выполняется

$$k_6 < k_4 + k_5 \log(n) < k_1 + k_2 n < k_3 1.61^n$$

- Получает своё развитие в O-нотации

$$f(n) = O\big(g(n)\big) \leftrightarrow \exists k, M \mid \forall n > k, M \cdot g(n) \geq |f(n)|$$

O-нотация

- Базовая интуиция, что при достаточно большом n, выполняется

$$k_6 < k_4 + k_5 \log(n) < k_1 + k_2 n < k_3 1.61^n$$

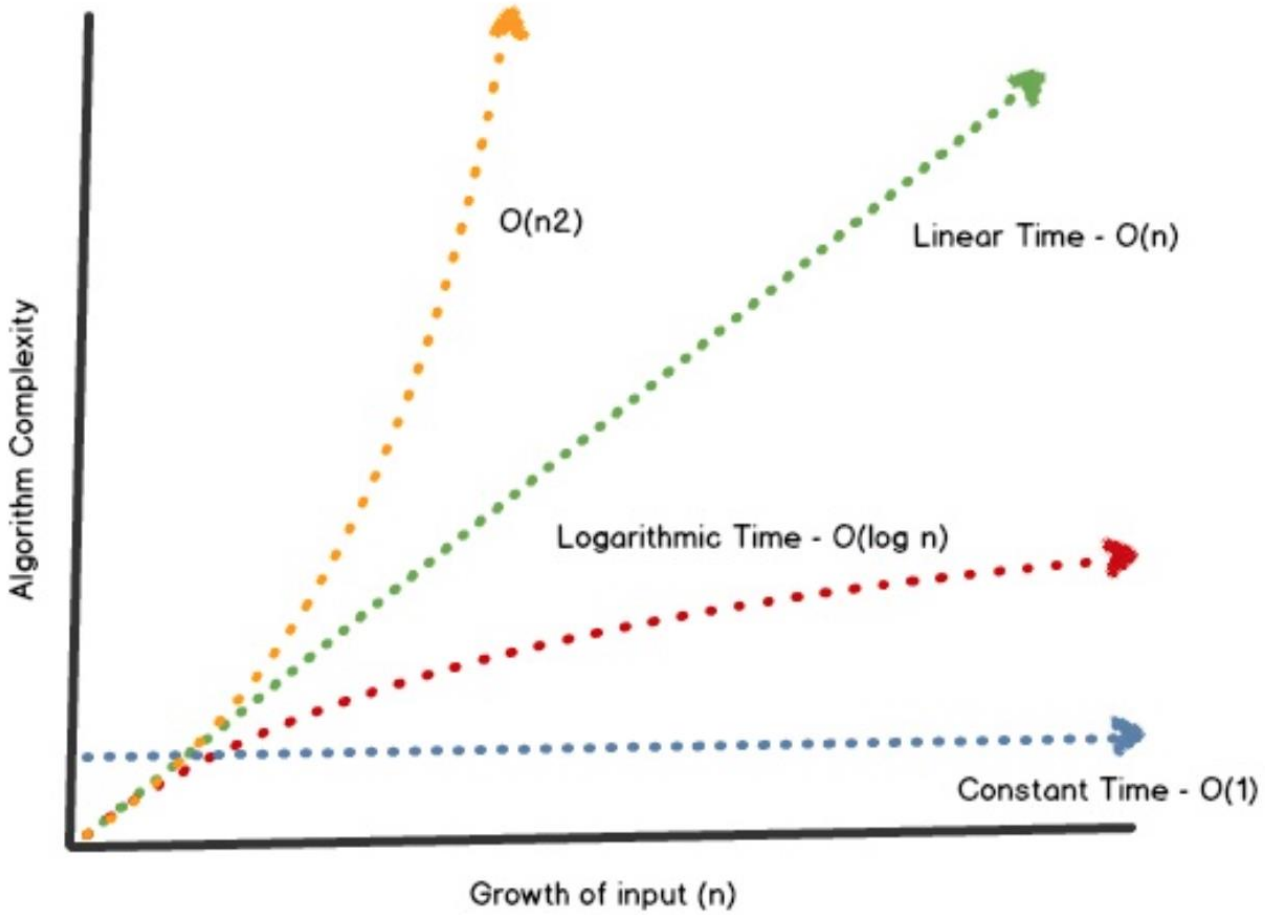
- Получает своё развитие в O-нотации

$$f(n) = O\big(g(n)\big) \leftrightarrow \exists k, M \mid \forall n > k, M \cdot g(n) \geq |f(n)|$$

- Например $2x^3 + 14x^2 + 87x + 3 = O(x^3)$
- O-нотация не слишком строгая. Например то же выражение это также $O(x^4)$
- Говорят, что O-нотация отражает асимптотику зависимости ресурса (например времени работы алгоритма) от главного параметра в задаче (например номера числа Фибоначчи)

O-нотация

	n	$nlog(n)$	n^2	2^n
10	1	1	1	1
50	1	1	1	13д
10^6	1	1	15м	∞
10^{10}	10с	2м	3г	∞
10^{14}	2ч	28ч	∞	∞



Упражнения с асимптотикой

- Оцените асимптотику следующих выражений

$$n + \log(n) + \sin(n)$$

$$5^{\log_2 n} + n^2\sqrt{n}$$

$$n^{100} + 1.1^n$$

- Расположите выражения по возрастанию порядка роста

3^n	$n \log_2 n$	$\log_4 n$	n	$2^{\log_5 n}$	n^2	$\sqrt{n}$	2^{2n}

Problem LM: наименьшее число

- Число 2520 является наименьшим числом, которое делится без остатка на числа от 2 до 10
- Задача состоит в том, чтобы найти наименьшее число, которое делится без остатка на числа от 2 до N
- Вам предлагают наивный алгоритм: идти от числа N вверх и каждое встретившееся число проверять для каждого из N чисел. (см. lmnaive.c)
- **Оцените асимптотику наивного алгоритма**
- Подумайте, можно ли использовать алгоритм E для лучшего решения этой задачи?
- Математический инсайт: $lcm(a,b) = \frac{ab}{\gcd(a,b)}$ и $lcm(a,b,c) = lcm(lcm(a,b),c)$

Warmup: простые числа

- Определение

$unit\ x \Leftrightarrow \exists u, ux = 1$

$prime\ p \Leftrightarrow \nexists x, x \neq u \cap x \neq pu \cap x \backslash \mathrm{p}$

- Мнемоническое правило "делится только на единицу и на само себя"
- Но строго говоря в целых числах units это 1 и -1
- Значит реально ещё на -1 и на минус само себя

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Алгоритм P, первое приближение

- Простейший способ определить, является ли число простым

```
int is_prime(unsigned n) {

  if (n < 2) return 0;

  int last = (int) sqrt(n) + 1;

  for (int j = 2; j <= last; ++j)
    if ((n % j) == 0)
      return 0;

  return 1;
}
```

- Оцените асимптотику этого алгоритма по времени

Алгоритм P, первое приближение

- Простейший способ определить, является ли число простым

```
int is_prime(unsigned n) {

  if (n < 2) return 0;

  int last = (int) sqrt(n) + 1;

  for (int j = 2; j < last; ++j)
    if ((n % j) == 0)
      return 0;

  return 1;
}
```

- Асимптотическая сложность $O(\sqrt{n})$. Кажется, этот алгоритм можно улучшить

Алгоритм P, второе приближение

- Используем тот факт, что чётные всегда не простые кроме 2

```
int is_prime(unsigned n) {
  if (n == 2) return 1;
  if ((n < 2) || ((n % 2) == 0)) return 0;

  int last = (int) sqrt(n) + 1;

  for (int j = 3; j < last; j += 2)
    if ((n % j) == 0)
      return 0;

  return 1;
}
```

- Скорость превосходит первое приближение вдвое. Асимптотика?

Алгоритм P

- Используем тот факт, что простые всегда имеют вид $6k \pm 1$

```
int is_prime(unsigned n) {
  if ((n == 2) || (n == 3)) return 1;
  if ((n < 2) || ((n % 2) == 0) || ((n % 3) == 0)) return 0;

  int last = (int) sqrt(n) + 1;

  for (int j = 5; j < last; j += 6)
    if (((n % j) == 0) || ((n % (j + 2)) == 0))
      return 0;

  return 1;
}
```

- Скорость превосходит первое приближение втрое. Асимптотика?

Обсуждение

- Асимптотическая сложность не измеряет время выполнения задачи.
- Она измеряет то, как изменяется время выполнения при изменении входных данных.

Problem PN: N-ное простое число

- Первым простым числом является 2, шестым является 13
- Используйте алгоритм P чтобы вычислить N-е простое число
- Вычислите для начала N = 1000, потом увеличивайте.
- До какого числа вы сможете досчитать в пределах 60 секунд (используйте ulimit)?
- Сможете ли вы использовать для оптимизации идеи, использованные для оптимизации алгоритма P?
- Оцените асимптотику вашего решения

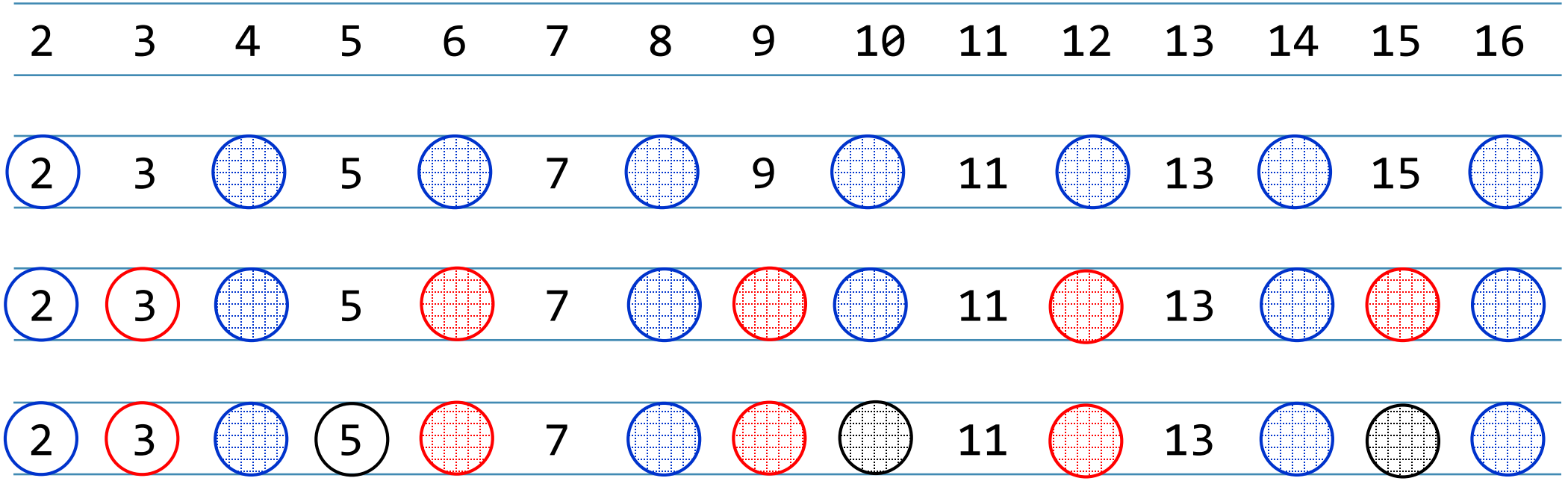
Обсуждение

- Пока что речь шла только об одном ресурсе – времени
- Но бывают и другие ресурсы. Ваши предположения?

Обсуждение

- Пока что речь шла только об одном ресурсе – времени
- Но бывают и другие ресурсы:
  - Память
  - Объём пересылаемых по сети данных
  - Сложность разработки в человеко-часах
  - Стоимость лицензий для подключаемых сторонних библиотек
  - Энергопотребление компьютера
- Память выделена потому что это второй по важности ресурс после времени
- Разумеется память это ресурс только в языках с явным управлением памятью. К счастью язык C из этих

Простые числа: решето Эратосфена



- Вычеркиваются все числа кратные каждому простому. Следующее простое это ближайшее невычеркнутое.

Проектирование решета: структуры

- Решето это объединение его размера с указателем на память. Объединения типов называются структурами.

```
struct sieve_t {
  unsigned size;
  unsigned char *sieve;
};
```

- Использование

```
struct sieve_t s = init_sieve(100); // для чисел от 0 до 100

assert (s.sieve != NULL && s.size > 0);

int is63 = is_prime(s, 63); // проверяем простое ли число 63
```

Минимум о структурах

- Структура задаётся ключевым словом struct и содержит поля разных типов

```
struct S { int x; int y; char z; };
```

- Объект структуры можно инициализировать при первом определении

```
struct S t = {1, 2, 'a'};
```

- Доступ к полям структуры делается через точку

```
t.x = t.y + 1;
assert (t.x == 3);
```

- Возможен указатель на структуру, тогда обращаемся через стрелку.

```
struct S *pt = &t; assert (pt->x == 3);
```

Алгоритм S: построение решета

```
struct sieve_t init_sieve (unsigned n) {
  unsigned char *sieve = calloc(n, sizeof(unsigned char));
  struct sieve_t res = { n, sieve };
  assert ((n > 1) && (sieve != NULL));

  unsigned r = (unsigned) sqrt (n) + 1;
  res.sieve[0] = res.sieve[1] = 1;

// напишите здесь код, который для каждого i устанавливает
// res.sieve[i] = 1, если число составное

  return res;
}
```

Оцените асимптотическую сложность получившегося алгоритма

Освобождение памяти

- После использования решета следует освободить выделенную через `calloc` память

```
void free_sieve(struct sieve_t *s) {
  free(s->sieve);
  s->sieve = 0;
  s->size = 0;
}
```

- Все ли понимают почему сюда решето пришло по указателю?

Проверка с помощью решета

- Поскольку решето содержит `1` для составных и `0` для простых, на проверке, надо инвертировать логику

```
unsigned is_prime (struct sieve_t s, unsigned n) {
  assert (n < s.size);
  return (s.sieve[n] == 1) ? 0 : 1;
}
```

- Использован тернарный оператор `a ? b : c`
- Означает "если a, то b, иначе c". Более короткая форма, когда не хочется писать if.

Сводим всё вместе

- Выделить решето на 100 элементов

```
struct sieve_t s = init_sieve(100);
```

- Проверить число 97 с помощью решета

```
assert (is_prime(s, 97) == 1);
```

- Освободить решето

```
free_sieve(&s);
```

Problem PN2: снова N-е простое

- Чтобы вычислить N-е простое число для `N > 20`, с помощью решета, нужно построить решето до числа $N(\log n + \log n \log n)$

```
unsigned long long sieve_bound(unsigned num) {
  assert(num > 20);
  double dnum = num;
  double dres = dnum * (log(dnum) + log(log(dnum)));
  return (unsigned long long) round(dres);
}
```

- Сравните результаты с результатами задачи PN
- Замерьте до какого числа вы сможете дойти за `60` секунд.

Problem GF: генерирующие формулы

- Эйлер открыл потрясающую формулу $n^2 + n + 41$.
- Она генерирует для $0 \leq n \leq 39$, 40 последовательных простых чисел.
- Ещё более потрясающая формула $36n^2 - 810n + 2753$ генерирует 45 последовательных простых (http://oeis.org/A050268)
- Используйте компьютер, чтобы рассмотреть все формулы, вида $n^2 + an + b, |a| < 1000, |b| < 1000$
- Какую самую длинную последовательность простых чисел вы сможете сгенерировать?
- Оптимизируйте алгоритм, отсекая заведомо плохие b (для n=0, число сразу должно быть простым).

Основы битовой арифметики

- Установить бит под номером n в числе x в значение 1

```
x = x | (1u << n);
```

- Установить бит под номером n в числе x в значение 0

```
x = x & ~(1u << n);
```

- Считать значение бита под номером n в числе x

```
val = (x >> n) & 1u;
```

- Инвертировать бит под номером n в числе x

```
x = x ^ (1u << n);
```

Тренируемся в битовой арифметике

- Подсчитайте

```
0xAC & 0x28 = ?
0xE2 | (~0xEF) = ?
075 & 063 = ?
62 ^ 43 = ?
0b10100 ^ 0 = ?
0x23 >> 2 = ?
0x23 << 4 = ?
```

Длинные и короткие операции

- Важно не путать длинные (логические) с короткими (побитовыми) операциями

```
unsigned char c = 0x78;
if (c && 1) { printf("long"); } // логическое "и"
if (c & 1) { printf("short"); } // побитовое "и"
```

- Какая логическая операция соответствует побитовому исключающему или?

Problem PE: побитовое решето

- Сейчас решето Эратосфена, которое строит алгоритм S, хранит unsigned char (то есть 8 бит) на каждый признак простое / не простое. Это немыслимый расход памяти.
- Вам предлагается оптимизировать построение решета таким образом, чтобы признак того является ли число простым хранился в каждом бите решета.
- Это позволит сократить расход памяти в 8 раз.
- Разумеется это несколько усложнит функции init_sieve и is_prime
- Подумайте о тестировании вашего решета

Случайные числа

- В языке C случайные числа проще всего генерировать функцией `rand()`
- Эта функция возвращает равномерное число от 0 до $RAND\_MAX$.
- Проверьте что такое $RAND\_MAX$ в вашей реализации библиотеки
- Чтобы получить число от 0 до $N - 1$, достаточо подсчитать `rand() % N`
- Это не лучший способ генерации случайных чисел, но он достаточно хорош пока что

Тест Ферма

- Чтобы протестировать большое число на простоту, построение решета бывает затруднительно. Например чтобы проверить $2^{50} + 7$, решето должно занимать много терабайт даже после всех оптимизаций.
- Математический инсайт: малая теорема Ферма

$a^{p-1} \equiv 1\ (p)$ если *p* простое и *a* не делится на *p*

- К сожалению для многих составных n, $\exists a$, $a^{n-1} \equiv 1\ (n)$ это Fermat liar

$38^{220} \equiv 1(221)$ но $24^{220} \equiv 81(221)$ значит 221 составное

- Такое a, что $a^{n-1} \neq 1\ (n)$ называется свидетелем (Fermat witness) непростоты, например 24 это witness для 221.
- Обычно свидетеля выбирают случайно или ищут перебором

Problem FT: тест Ферма

- Реализуйте тест Ферма.
- Для тестирования можно использовать решето и небольшие простые.
- Некоторые числа (они называются числами Кармайкла) не имеют свидетелей, а только лжецов и для них тест Ферма не работает. Сколько таких чисел вы нашли во время тестирования?

Problem PF: Fibonacci primes

- Некоторые числа Фибоначчи, например 5 и 13 являются также простыми числами
- Для всех чисел Фибоначчи меньших 2^{64}, определите, являются ли они также простыми
- Сколько простых чисел вы нашли?

Домашняя работа HWE (optional)

- Результаты PE могут быть улучшены далее: память можно сократить ещё в два раза, если хранить в каждом бите только признаки простоты для нечётных чисел
- На самом деле, память можно сократить ещё в полтора раза, если хранить два массива: первый для всех $(6k-1)$-ых а второй для всех $(6k+1)$-ых битов

```
struct sieve_t {
  unsigned size;
  unsigned char *plus1; // for 7, 13, 19, 25, ....
  unsigned char *minus1; // for 5, 11, 17, 23, ....
};
```

- Реализуйте такое решето. Поможет ли оно вам найти миллиардное простое?

Литература

- [C11] ISO/IEC, "Information technology – Programming languages – C", ISO/IEC 9899:2011
- [$K\&R$] Brian W. Kernighan, Dennis Ritchie – The C programming language, 1988
- [KGP] Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, Oren Patashnik – Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science, 1994
- [$TAOCP$] Donald E. Knuth – The Art of Computer Programming, 2011
- Project Euler, problem 27: https://projecteuler.net/problem=27
- Prime formulas: http://mathworld.wolfram.com/PrimeFormulas.html