Министерство образования и науки Российской Федерации

Московский физико-технический институт (Государственный университет)

Факультет управления и прикладной математики

Кафедра информатики и вычислительной математики

Специальность 010900 «Математические и информационные технологии »

Направление 030401 «Прикладные математика и физика »

Моделирование волновых процессов в условиях Арктического шельфа в присутствии различных ледовых образований

Выпускная квалификационная работа (магистерская диссертация) студентки 273а группы Стогний Полины Владимировны

Научный руководитель:кандидат физико-математических наук Хохлов Н.И.

Долгопрудный - 2018

Содержание

1 Введение **2**

2 Цели и задачи **3**

3 Математическая модель **3**

4 Методы расчета **5**
4.1 ENO-схемы 5
4.2 Метод Галеркина 6
4.3 Сеточно-характеристический метод 7

5 Описание граничных условий **11**

6 Описание контактных условий **13**

7 3D моделирование волновых процессов в северных морях в присутствии торосов, айсбергов, ледовых полей **15**
7.1 Исследование сейсмических волновых полей в северных морях при наличии ледяного поля 15
7.2 Исследование влияния ледяного поля на сейсмические волновые отклики 19
7.3 Исследование сейсмических волновых полей в северных морях при наличии айсбергов 21
7.4 Исследование сейсмических волновых полей в северных морях при наличии торосов 25

8 Результаты **27**

9 Заключение **28**

10 Литература **28**

1 Введение

На сегодняшний день освоение зоны Арктического шельфа – приоритетное направление для исследований в нашей стране. В данном регионе сосредоточено большое количество углеводородов [23]: 594 месторождений нефти, 159 газовых месторождений. Начально извлекаемые разведанные запасы нефти в Арктической зоне составляют 7.8 млрд. т. , из них 500 млн. т. - на шельфе, запасы газа - 65 млрд. м^3. , на шельфе - 10 млрд. м^3 [23]. Проведение геологоразведочных работ в данной области осложняется суровыми климатическими условиями и наличием большого количества различных ледовых образований. Последние, в свою очередь, существенно осложняют процесс освоения данного района. Прежде, чем приступить к проведению реальных геологоразведочных работ, стоит провести компьютерное моделирование геологических сред с учетом особенностей конкретного региона, с целью упростить дальнейшие исследования, а также уменьшить стоимость проведения такого рода работ. В данной работе представлены результаты численного моделирования волновых процессов в условиях Арктического шельфа при наличии различных ледовых образований – ледяного поля, торосов, айсбергов.
Была поставлена задача изучения влияния наличия ледовых образований на вертикальные и горизонтальные составляющие скоростей на результирующие сейсмограммы путем проведения численных экспериментов.
В работе представлены результаты численного моделирования распространения сейсмических волн для модели с ледяным полем – общая модель и более подробная, для моделей с одним и двумя айсбергами, для модели с торосом. Был проведен анализ влияния ледовых образований на отклик от следующих геологических сред: морская вода, донный грунт, нефтесодержащее включение. Получены волновые картины для моделей с ледяным полем и айсбергами, построены сейсмограммы для моделей с ледяным полем, айсбергами и торосом. Полученные волновые картины и сейсмограммы подтверждают необходимость учитывать ледовые образования, так как они вносят существенный вклад в результирующие волновые картины и сейсмограммы.
Все вычисления были проведены с помощью сеточно-характеристического метода, который позволяет ставить корректные граничные условия на границах области интегрирования и контактные условия между линейно-упругими и акустическими слоями.

2 Цели и задачи

Основными целями и задачами данной работы являются:

- Построение ряда моделей геологических сред в условиях Арктического шельфа при наличии различных ледовых образований – ледяного поля, торосов, айсбергов.
- Проведение численного моделирования прямых задач сейсморазведки на построенных геологических моделях.
- Изучение влияния наличия ледовых образований на вертикальные и горизонтальные составляющие скоростей на результирующие сейсмограммы путем проведения численных экспериментов.
- Анализ влияния ледовых образований на отклик от следующих геологических сред: морская вода, донный грунт, нефтесодержащее включение.
- Получение волновых картин для моделей с ледяным полем и айсбергами, построение сейсмограмм для моделей с ледяным полем, айсбергами и торосом.
- Анализ необходимости учета ледовых образований, исследование их вклада в результирующие волновые картины и сейсмограммы.

3 Математическая модель

Для описания различных динамических процессов, которые происходят в гетерогенных геологических средах, в общем случае, применяются линейно-упругая и акустическая модели сред.

Запишем второй закон Ньютона в локальной форме:

$$\rho \boldsymbol{v} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^T, \tag{1}$$

где ρ-плотность материала, $\boldsymbol{v}$-скорость, $\boldsymbol{\sigma}$- тензор напряжений Коши.

Симметричный тензор малых деформаций [2] выглядит так:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla \otimes \boldsymbol{D} + \boldsymbol{D} \otimes \nabla), \tag{2}$$

где $\boldsymbol{D}$ – поле смещений, $\otimes$ – оператор тензорного произведения.
Продифференцируем (2) по времени, учитывая, что $\boldsymbol{v} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{D}$:

$$\frac{d}{dt}\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla \otimes \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \otimes \nabla), \tag{3}$$

Закон Гука для связи тензора малых деформаций и тензора напряжений в изотропной среде [3] представлен ниже:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda tr(\varepsilon)\boldsymbol{I} + 2\mu\varepsilon, \tag{4}$$

где λ, μ-параметры Ляме, определяющие свойства упругого материала, I – единичный тензор, $tr(\varepsilon)$ – след "матрицы"ε.
Подставив (3) в (4), используя соотношение $tr(\frac{d}{dt}\varepsilon) = \frac{d}{dt}\varepsilon\boldsymbol{I} = \nabla\boldsymbol{v}$ получим:

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\nabla\boldsymbol{v})\boldsymbol{I} + \mu(\nabla \otimes \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \otimes \nabla), \tag{5}$$

Уравнения (1) и (5) представляют систему уравнений для линейно-упругой среды [4] :

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{v} = (\nabla \cdot \sigma)^T \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\sigma = \lambda(\nabla \cdot \boldsymbol{v})I + \mu(\nabla \otimes \boldsymbol{v} + (\nabla \otimes \boldsymbol{v})^T), \tag{7}$$

Система уравнений для акустической среды [1] выглядит так:

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{v} = -\nabla p \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}p = -c^2\rho(\nabla\boldsymbol{v}), \tag{9}$$

Уравнение (8) – уравнение Эйлера для идеальной жидкости, где p – давление.
Уравнение (9) – уравнение состояния, то есть зависимость между давлением и сжимаемостью среды, которая равна $\frac{1}{\rho c^2}$.

4 Методы расчета

Для численного решения систем уравнений (6),(7) и (8),(9) применяются различные схемы: ENO-схемы, метод Галеркина, сеточно-характеристические методы и другие. Рассмотрим первые три метода подробнее.

4.1 ENO-схемы

Схема типа ENO применяется для уравнения переноса с использованием двух и более шаблонов, чтобы обеспечить 2-й или 3-й порядок точности и монотонность [24].

Схема в потоковой форме представлена ниже:

$$\upsilon_1{}^{n+1} = \upsilon_m{}^n + \frac{\alpha\tau}{h}(f_{m+1/2} - f_{m-1/2}), \tag{10}$$

Числовые потоки $f_{m+1/2}, f_{m-1/2}$ вычисляются через введенные неопределенные коэффициенты:

$$f_{m+1/2} = \begin{cases} \alpha\upsilon_{m-1}{}^n + (1-\alpha-\beta)\upsilon_m{}^n + \beta\upsilon_{m+1}{}^n, a \geqslant 0, (32) \\ \alpha\upsilon_{m+2}{}^n + (1-\alpha-\beta)\upsilon_{m+1}{}^n + \beta\upsilon_m{}^n, a < 0 \end{cases} \tag{11}$$

$$f_{m-1/2} = \begin{cases} \alpha\upsilon_{m-2}{}^n + (1-\alpha-\beta)\upsilon_{m-1}{}^n + \beta\upsilon_m{}^n, a \geqslant 0 \\ \alpha\upsilon_{m+1}{}^n + (1-\alpha-\beta)\upsilon_m{}^n + \beta\upsilon_{m-1}{}^n, a < 0 \end{cases} \tag{12}$$

Первое дифференциальное приближение разностной схемы после приведения подобных слагаемых выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial\upsilon}{\partial t} + a\frac{\partial\upsilon}{\partial x} = [\frac{h}{2}|a|(1+2\alpha-2\beta) - \frac{\tau a^2}{2}]\frac{\partial^2\upsilon}{\partial x^2} \tag{13}$$

При $\alpha = \beta = 0$ схема 1-го порядка, при $\alpha = 0, \beta = 1/2$ – 2-го порядка с центральными разностями, при $\alpha = -1/2, \beta = 0$ – 2-го порядка с ориентированными разностями.

Введем аналог числа Куранта $\sigma = \frac{|a|h}{\tau}$. Исследование обеих схем (с центральными разностями и ориентированными разностями) приводит к следующему условию монотонности:

$$\frac{1-\sigma}{2(2-\sigma)}\triangle_{m-1/2}\upsilon \leq \triangle_{m+1/2}\upsilon \leq \frac{2(1+\sigma)}{\sigma}\triangle_{m-1/2}\upsilon \tag{14}$$

Тогда потоки $f_{m+1/2}, f_{m-1/2}$ можно представить:

$$f_{m+1/2} = \begin{cases} \frac{3-\sigma}{2}\upsilon_m{}^n - \frac{1-\sigma}{2}\upsilon_{m-1}{}^n, a \geqslant 0 \\ \frac{3-\sigma}{2}\upsilon_{m+1}{}^n - \frac{1-\sigma}{2}\upsilon_{m+2}{}^n, a < 0 \end{cases} \tag{15}$$

если $(a \cdot \Delta\upsilon \cdot \Delta^2\upsilon)_{m+1/2} \geqslant 0$

$$f_{m+1/2} = \frac{1-\sigma signa}{2}\upsilon_{m+1}{}^n + \frac{1+\sigma signa}{2}\upsilon_m{}^n, \tag{16}$$

если

$$(a \cdot \Delta\upsilon \cdot \Delta^2\upsilon)_{m+1/2} < 0,$$

$$\Delta_{m+1/2}\upsilon = \upsilon_{m+1} - \upsilon_m, \tag{17}$$

$$\Delta^2\upsilon_{m+1/2} = \Delta\upsilon_{m+1} - \Delta\upsilon_m \tag{18}$$

4.2 Метод Галеркина

Пусть дано уравнение:

$$A\upsilon - f = 0, \tag{19}$$

где υ - искомый элемент пространства, f - данный элемент пространства.

Выберем последовательность координатных элементов $\varphi_n \in D_A$, и построим приближенное решение уравнения (19) в виде [25]:

$$\upsilon_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k \tag{20}$$

Определим коэффициенты a_k , исходя из требования, чтобы после замены υ через υ_n левая часть уравнения (19) была ортогональна к $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$.

Отсюда получим систему линейных уравнений для a_k (неизвестные):

$$\sum_{k=1}^{n}(A\varphi_k, \varphi_m)a_k = (f, \varphi_m), m = 1, 2, ..., n. \tag{21}$$

4.3 Сеточно-характеристический метод

В данной работе для численного решения систем уравнений (6),(7) и (8),(9) использовался сеточно-характеристический метод [5]. Он позволяет строить корректные численные алгоритмы расчета точек на границах [6] и точек, лежащих на поверхностях раздела двух сред с разными плотностями и разными параметрами Ляме.

Рассмотрим систему уравнений (6), (7). Ее можно представить в виде уравнений (22), (23):

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\upsilon_j} = \frac{\partial\sigma_{ji}}{\partial x_i} \tag{22}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\sigma_{ij} = \lambda(\sum_k \frac{\partial\upsilon_k}{\partial x_k})I_{ij} + \mu(\nabla_i\upsilon_j + \nabla_j\upsilon_i), \tag{23}$$

или в трехмерном случае – системы уравнений (24) - (32):

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\upsilon_x} = \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z} \tag{24}$$

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\upsilon_y} = \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial z} \tag{25}$$

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\upsilon_z} = \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} \tag{26}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\sigma_{xx} = \lambda(\frac{\partial\upsilon_x}{\partial x} + \frac{\partial\upsilon_y}{\partial y} + \frac{\partial\upsilon_z}{\partial z}) + 2\mu(\frac{\partial\upsilon_x}{\partial x}), \tag{27}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\sigma_{yy} = \lambda(\frac{\partial\upsilon_x}{\partial x} + \frac{\partial\upsilon_y}{\partial y} + \frac{\partial\upsilon_z}{\partial z}) + 2\mu(\frac{\partial\upsilon_y}{\partial y}), \tag{28}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\sigma_{zz} = \lambda(\frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon_y}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon_z}{\partial z}) + 2\mu(\frac{\partial \upsilon_z}{\partial z}), \tag{29}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\sigma_{xy} = \mu(\frac{\partial \upsilon_y}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon_x}{\partial y}), \tag{30}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\sigma_{xz} = \mu(\frac{\partial \upsilon_x}{\partial z} + \frac{\partial \upsilon_z}{\partial x}), \tag{31}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\sigma_{yz} = \mu(\frac{\partial \upsilon_y}{\partial z} + \frac{\partial \upsilon_z}{\partial y}), \tag{32}$$

Систему уравнений (24) – (32) перепишем в матричном виде:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \mathbf{A_1}\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x_1} + \boldsymbol{A_2}\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial x_2} + \boldsymbol{A_3}\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial x_3} = 0, \tag{33}$$

где матрицы A_j имеют следующий вид:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 \\ -\lambda - 2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{34}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda - 2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{35}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda - 2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{36}$$

В (33) вектор $\boldsymbol{q}$ – вектор, состоящий из трех компонент скорости и шести компонент симметричного тензора напряжений:

$$\boldsymbol{q} = \{\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z, \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}\}^T \tag{37}$$

К уравнению (33) применим метод расщепления по пространственным координатам. В результате, получим три системы одномерных уравнений:

$$\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial t} = \boldsymbol{A_j} \frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial x_j}, j = 1, 2, 3 \tag{38}$$

Каждая из этих систем является гиперболической и имеет полный набор собственных векторов с действительными собственными значениями. Следовательно, каждую из систем (38) можно представить в следующем

виде:

$$\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial t} = \boldsymbol{\Omega_j}^{-1} \boldsymbol{\Lambda_j} \boldsymbol{\Omega_j} \frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial x_j} \tag{39}$$

Здесь $\boldsymbol{\Omega}_j$ – матрица, состоящая из собственных векторов, $\boldsymbol{\Lambda_j}$ – диагональная матрица, элементами которой являются собственные значения. Для всех координат матрица $\boldsymbol{\Lambda}$ будет выглядеть:

$$\boldsymbol{\Lambda} = diag\{c_1, -c_1, c_2, -c_2, c_2, -c_2, 0, 0, 0\}, \tag{40}$$

где $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ – продольная скорость звука в среде, $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$ – поперечная скорость звука.

После замены переменных $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\Omega q}$ каждая из систем (39) распадается на девять независимых скалярных уравнений переноса:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\nu}}{\partial t} + \boldsymbol{\Lambda} \frac{\partial \boldsymbol{\nu}}{\partial x} = 0 \tag{41}$$

Одномерные уравнения переноса можно решить методом характеристик или конечно-разностной схемой [7].
После того, как все компоненты $\boldsymbol{\nu}$ перенесены, находим само решение:

$$\mathbf{q^{n+1}} = \boldsymbol{\Omega}^{-1} \nu^{\mathbf{n+1}} \tag{42}$$

Аналогичные преобразования можно провести для системы уравнений (8), (9), описывающей акустическую среду.

Для решения уравнений переноса (41) использовался сеточно-характеристический метод на основе схемы Русанова 3-го порядка точности [8]:

$$\nu_m{}^{n+1} = \alpha_{-2} \nu_{m-2}{}^{n} + \alpha_{-1} \nu_{m-1}{}^{n} + \alpha_0 \nu_m{}^{n} + \alpha_1 \nu_{m+1}{}^{n}, \tag{43}$$

где коэффициенты $\alpha_{-2}, \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1$ можно найти из условия 3-го порядка

аппроксимации схемы, разложив ее в ряд Тейлора относительно, например, точки (${x_m}^n$). Условия для 2-го, 3-го и т.д. порядков аппроксимаций определяются условием [8]:

$$-(-\sigma)^k + \sum_{\mu,\nu}(\mu - \nu\sigma)^k {\alpha_\mu}^\nu(\sigma) = 0, k = 2, 3, ...; \mu = 0, \pm 1, ...; \nu = 1, 0, -1, ..., \tag{44}$$

гду $\sigma = \frac{\Lambda\tau}{h}$, λ – скорость переноса, τ – шаг интегрирования по времени, h – шаг интегрирования по координате.
У нас – 3-й порядок аппроксимации, следовательно, получим 4 уравнения вида (44) для $k = 0, 1, 2, 3$ для нахождения коэффициентов $\alpha_{-2}, \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1$:

$$\alpha_{-2} + \alpha_{-1} + \alpha_0 + \alpha_1 = 1 \tag{45}$$
$$-2\alpha_{-2} - \alpha_{-1} + \alpha_1 = -\sigma \tag{46}$$
$$4\alpha_{-2} + \alpha_{-1} + \alpha_1 = \sigma^2 \tag{47}$$
$$-8\alpha_{-2} - \alpha_{-1} + \alpha_1 = -\sigma^3 \tag{48}$$

Для регуляризации численного решения использовался критерий монотонности [8]. Для положительных значений $\lambda > 0$ критерий выглядит следующим образом:

$$min\{{\nu_m}^n, {\nu_{m-1}}^n\} \leqslant {\nu_m}^{n+1} \leqslant max\{{\nu_m}^n, {\nu_{m-1}}^n\}, \tag{49}$$

для отрицательных значений $\lambda < 0$ критерий будет симметричным.

5 Описание граничных условий

Для вычисления точек на границах области интегрирования используются следующие три уравнения:

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{n+1}} = \boldsymbol{b}, \tag{50}$$

где $\boldsymbol{B}$ – матрица 3x9, $\boldsymbol{b}$ – трехмерный вектор, $\boldsymbol{q^{n+1}}$ – вектор значений скорости и компонент тензора напряжений в точке на границе области интегрирования на следующем временном слое n+1.
Решение (42) на следующем временном слое n+1 будет выглядеть так [9]:

$$\boldsymbol{q^{n+1}} = \boldsymbol{\Omega^{(in)}\nu^{n+1(in)}} + \boldsymbol{\Omega^{(out)}\nu^{n+1(out)}} = \boldsymbol{q^{n+1(in)}} + \boldsymbol{\Omega^{(out)}\nu^{n+1(out)}}, \quad (51)$$

где $\Omega^{(in)}$ и $\Omega^{(out)}$ – матрицы, которые составлены из столбцов, соответствующих входящим или выходящим характеристикам, матрицы Ω^{-1}. $\nu^{n+1(in)}$ можно вычислить аналогично ν^{n+1} для внутренних точек. $\nu^{n+1(out)}$ выражается из граничных условий (50):

$$\nu^{n+1(out)} = (\boldsymbol{B\Omega^{(out)}})^{-1}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{Bq^{n+1(in)}}) \quad (52)$$

Подставляем (52) в (51) и получаем общую формулу для расчета точек на границах области интегрирования:

$$\boldsymbol{q^{n+1}} = \boldsymbol{q^{n+1(in)}} + \boldsymbol{\Omega^{(out)}}(\boldsymbol{B\Omega^{(out)}})^{-1}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{Bq^{n+1(in)}}) \quad (53)$$

В данной работе используются следующие граничные условия: условие свободной границы и условие поглощения.
Для описания свободной границы используется уравнение:

$$\boldsymbol{\sigma n} = 0, \quad (54)$$

где $\boldsymbol{n}$ – вектор нормали на внешней стороне границы, σ – тензор напряжений Коши. Правая часть уравнения (22) – плотность внешних сил на границе (= 0 для случая свободной границы).

Для описания условия поглощения используется уравнение:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\Omega^{(*)}}, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}, \quad (55)$$

где матрица $\boldsymbol{\Omega^{(*)}}$ составлена из столбцов матрицы собственных значений $\boldsymbol{\Lambda}$, соответствующих выходящим характеристикам [10].

Общая схема постановки прямой задачи сейсморазведки представлена

на рис. 1: на верхней границе AB устанавливается граничное условие свободной границы, на боковых границах AC, BD и нижней границе CD – условие поглощения. На границе AB белый треугольник – точечный источник сейсмических волн, серые треугольники – приемники сигнала.

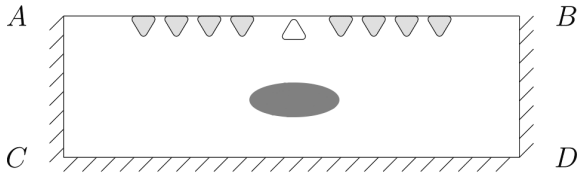


Рис. 1: Схематичное изображение расчетной области с изображением границ.

6 Описание контактных условий

Рассмотрим условие на контактных границах между частями интегрирования, описываемыми системами уравнений (6),(7) и (8), (9). Обозначим данные контактирующие области за a и b, $\boldsymbol{n_{ab}}$ – внешняя нормаль к твердому телу, являющаяся внутренней нормалью к жидкости [11]. Контактное условие свободного скольжения на границе областей a и b выглядит следующим образом :

$$\boldsymbol{n_{ab}} \cdot \boldsymbol{v}^{\boldsymbol{a,n+1}} = \boldsymbol{n_{ab}} \cdot \boldsymbol{v}^{\boldsymbol{b,n+1}} = \boldsymbol{V}^{\boldsymbol{n+1}} \tag{56}$$

$$[\boldsymbol{n_{ab}}, \boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{a,n+1}} \cdot \boldsymbol{n_{ab}}] = [\boldsymbol{n_{ab}}, \boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{b,n+1}} \cdot \boldsymbol{n_{ab}}] = 0 \tag{57}$$

$$p^{b,n+1} = -(\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{a,n+1}} \cdot \boldsymbol{n_{ab}}) \cdot \boldsymbol{n_{ab}} \tag{58}$$

Условие (56) обеспечивает равенство нормальных компонент скоростей в идеальной жидкости и твердом теле, (57) представляет собой равенство нулю тангенциальной компоненты поверхностной плотности сил со стороны твердого тела, (58) задает равенство нормальной компоненты поверхностной плотности сил со стороны твердого тела давлению в идеальной жидкости.

Вектор скорости $\boldsymbol{V^{n+1}}$ вычисляется так, чтобы были выполнены условия (56)-(58):

$$\boldsymbol{V^{n+1}} = \frac{1}{\rho_a c_{a2} + \rho_b c_{b2}} \cdot \tag{59}$$

$$[\rho_a c_{a1} \boldsymbol{v_a}^{\boldsymbol{n+1(in)}} + \rho_b c_{b1} \boldsymbol{v_b}^{\boldsymbol{n+1(in)}} - (\boldsymbol{\sigma_a}^{\boldsymbol{n+1(in)}} - \boldsymbol{\sigma_b}^{\boldsymbol{n+1(in)}} \cdot \boldsymbol{n})] \cdot \boldsymbol{n} \tag{60}$$

В (60) $\boldsymbol{v_a}^{\boldsymbol{n+1(in)}}$ можно найти так же, как $\boldsymbol{v_a}^{\boldsymbol{n+1}}$ для внутренних точек. $\boldsymbol{v_a}^{\boldsymbol{n+1(out)}}$ выражается из граничного условия $\boldsymbol{Bq^n = b}$:

$$\boldsymbol{v^{n+1(out)} = (B\Omega^{(out)})^{-1}(b - Bq^{n+1(in)})} \tag{61}$$

В (61) $\boldsymbol{\Omega^{(in)}}$ и $\boldsymbol{\Omega^{(out)}}$ – прямоугольные матрицы, которые составлены из столбцов матрицы $\boldsymbol{\Omega^{-1}}$, соответствующих входящим или выходящим из области интегрирования характеристикам, соответственно.

Для описания поведения жидкости используется смешанное граничное условие с заданной нормальной компонентой скорости $\boldsymbol{V_n}$ и тангенциальной составляющей $\boldsymbol{f_\tau}$, которое выглядит следующим образом [12]:

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f_\tau} + \boldsymbol{n}(\rho c_1 \boldsymbol{V_n} + \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{n+1(in)}} \cdot \boldsymbol{n} - \rho c_1 \boldsymbol{v}^{\boldsymbol{n+1(in)}})), \boldsymbol{f_\tau} = \boldsymbol{0}. \tag{62}$$

В (62) $\boldsymbol{f}$ – полная плотность поверхностных сил ($\boldsymbol{\sigma \cdot n = f}$). Затем используются формулы для заданной плотности поверхностных сил на границе $\boldsymbol{f}$:

$$\boldsymbol{q^{n+1}} = \boldsymbol{q^{n+1(in)}} - \frac{c_1 \boldsymbol{z^{n+1}} - (c_1 - c_2)(\boldsymbol{z^{n+1}} \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{n}}{\rho c_1 c_2} \tag{63}$$

$$\boldsymbol{\sigma^{n+1}} = \boldsymbol{\sigma^{n+1(in)}} - \boldsymbol{z^{n+1}} \otimes \boldsymbol{n} - \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{z^{n+1}} - \frac{(\boldsymbol{z^{n+1}} \cdot \boldsymbol{n})}{\lambda + 2\mu}(\lambda \boldsymbol{I} - 2(\lambda + \mu)\boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n}) \tag{64}$$

Здесь $\boldsymbol{z^{n+1}} = \boldsymbol{\sigma^{n+1(in)}} \cdot \boldsymbol{n} - \boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{I} = diag(1,1,1)$.
Для твердого тела используется граничное условие с заданной скоростью $\boldsymbol{V}$ границы:

$$\boldsymbol{\upsilon^{n+1}} = \boldsymbol{V}, \tag{65}$$

$$\boldsymbol{\sigma^{n+1}} = \boldsymbol{\sigma^{n+1(in)}} - \rho[(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{g^{n+1}})((c_1 - 2c_2 - c_3)\boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n} + c_3\boldsymbol{I}) + \tag{66}$$

$$+c_2(\boldsymbol{g^{n+1}} \otimes \boldsymbol{n} + \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{g^{n+1}})], \tag{67}$$

где $c_3 = \sqrt{\frac{\lambda^2}{\rho(\lambda+2\mu)}}$, $\boldsymbol{g^{n+1}} = \boldsymbol{\upsilon^{n+1(in)}} - \boldsymbol{V}$.

7 3D моделирование волновых процессов в северных морях в присутствии торосов, айсбергов, ледовых полей

Ставится задача исследования волновых откликов от сред с различными параметрами: плотностью, продольной и поперечной скоростью звука.

Проведенные расчеты показывают возможность использования сеточно - характеристического метода для моделирования волновых процессов в условиях Арктического шельфа. Данный численный метод позволяет корректно ставить условия на границах области интегрирования и на границах расчетных областей. Метод учитывает физическую основу явления – распространение возмущений по характеристикам.

7.1 Исследование сейсмических волновых полей в северных морях при наличии ледяного поля

Были проведены численные эксперименты по решению задач сейсморазведки в условиях Арктического шельфа. Рассматривались реологические модели льда, воды и грунта. Лед был представлен упругой пластиной конечной толщины на поверхности воды. Лед рассматривался как линейно-упругое деформируемое тело, поскольку сейсмические импульсы настолько слабы, что деформации можно считать малыми. В данной модели толщина льда бралась равной 3 м., хотя толщина ледового покрова в зоне Арктического шельфа может составлять 2 – 2,5 м [13]. Разработанные алгоритмы и программа позволяет рассчитывать ледовые поля

различной толщины. Для сравнения брались две модели: с нефтегазовым слоем и без него. В расчетах шаг по пространству по координатам x и y брался равным 5 м. По координате z шаг в ледовом покрове составлял 0.5 м., в водном слое — 1 м., в грунтовом слое — 5 м. Шаг по времени, в соответствии с условием устойчивости Куранта, брался равным 10^{-4} с.; всего было выполнено 7 тысяч шагов по времени.

Рассматривался слой льда плотностью 917 кг/м^3, водный слой — толщиной 200 м. и плотностью 1000 кг/м^3, слой грунта — толщиной 1000 м. и плотностью 2100 кг/м^3. Ширина области интегрирования по осям x и y составляла 2000×2000 м^2. Нефтегазовое включение размерами 1200 м. на 1200 м. и плотностью 1800 кг/м^3 было расположено на глубине 700 м. под землей. Продольная скорость звука в ледовом покрове бралась равной 3940 м/с, поперечная скорость — 2493 м/с. Скорость звука в воде составляла 1500 м/с. В грунтовом слое поперечная скорость звука бралась равной 1875 м/с, продольная — 3000 м/с. Поперечная скорость звука в нефтегазовом слое составляла 2000 м/с, продольная — 2500 м/с. По бокам расчетной области ставились неотражающие граничные условия[14].

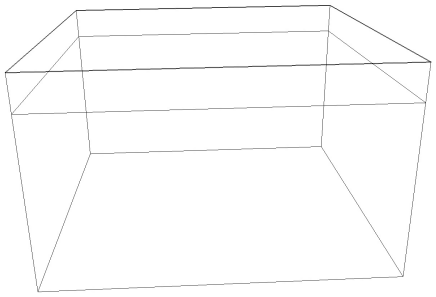
Воздействие осуществлялось одиночным источником импульса Рикера, который располагался в центре расчетной области на поверхности ледового покрова. Приемники располагались на дне в центре расчетной области на расстоянии 10 м друг от друга.

Схематичное изображение моделей можно увидеть на рис. 2:

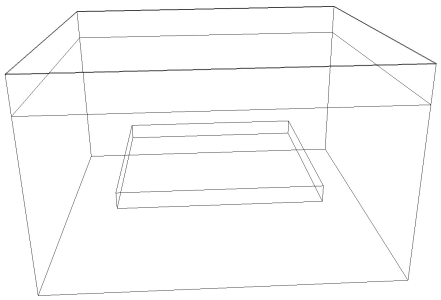
а) модель с ледовым покровом без нефтегазового включения;

б) модель с ледовым покровом и нефтегазовым включением.

Слой льда сложно отобразить на рисунке, так как его размеры гораздо меньше водного или грунтового. На рис. 2 представлены только водный, грунтовый и нефтегазовый слой.



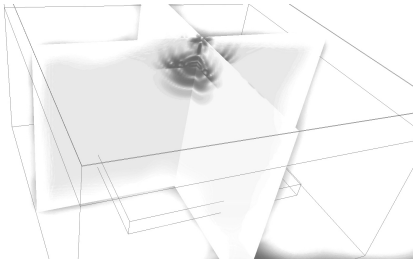
а) Модель с ледовым покровом без нефтегазового включения



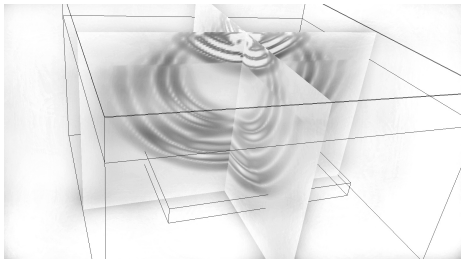
б) Модель с ледовым покровом и нефтегазовым включением

Рис. 2: Схематичное изображение моделей с ледовым покровом в начальный момент времени.

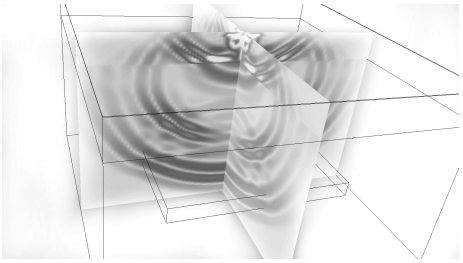
Волновые картины для модели с ледяным полем в различные моменты времени приведены на рис. 3. На рисунке 3а волна проходит через ледовый и водный слой, на рисунке 3б волна проходит сквозь грунтовый слой. На рисунках 3г, 3д волна достигла нефтегазового слоя, от него наблюдаются отражения. Здесь и далее, волновые картины получены с помощью программы, описанной в [15]. На рис. 3г видны отражения от нефтегазового слоя. Заметно, что ледовый покров не влияет на отражения от неоднородности в грунтовом слое.



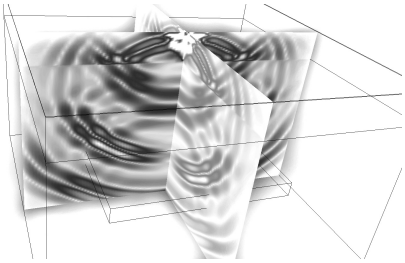
а) Волна в момент времени 0.18 с. в слоях: ледовый покров, вода.



б) Волна в момент времени 0.38 с. в слоях: ледовый покров, вода, грунтовый слой.



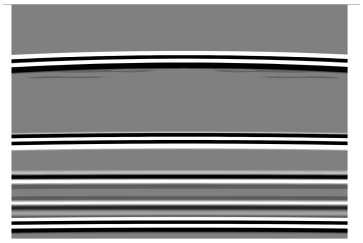
в) Волна в момент времени 0.44 с. в слоях: ледовый покров, вода, грунтовый слой



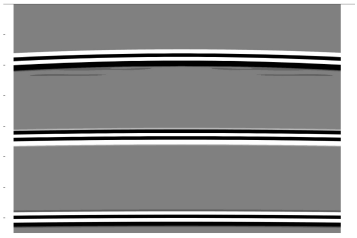
г) Волна в момент времени 0.52 с. в слоях: ледовый покров, вода, грунтовый слой.

Рис. 3: Волновые картины для моделей с ледовым покровом в различные моменты времени.

Сейсмограммы для данных постановок задач по оси z можно увидеть на рис. 4. Наверху обеих картинок — 4а, 4б — видны отклики от ледового покрова и слоя воды. Затем, через некоторое расстояние (а именно — 200 м, что представляет собой размер водного слоя) на обеих картинках заметны отражения от грунтового слоя. После них на рис. 4а присутствуют отражения от нефтегазового слоя, а на рис. 4б их нет, что соответствует условию постановки задачи. Сейсмограммы получены в результате работы с программой, описанной в [15].



а) Модель с нефтегазовым включением.



б) Модель без нефтегазового включения.

Рис. 4: Показательные сейсмограммы для различия ситуаций присутствия и отсутствия нефтегазового включения в моделях с ледовым покровом.

На основе полученных сейсмограмм и волновых картин можно сделать вывод, что ледовый покров не оказывает существенного влияния на получение отражений от нефтегазового включения.

7.2 Исследование влияния ледяного поля на сейсмические волновые отклики

Для более детального изучения влияния льда на волновые отклики рассматривалась реологическая модель ледяного поля, воды и грунта с меньшим шагом по координате, чем в модели из предыдущего раздела. Толщина льда бралась равной 2,5 м., водного слоя — 70 м, слоя грунта — 200 м. Ширина области интегрирования по осям x и y составляла 500×500 м^2. В расчетах шаг по пространству по координатам x и y брался равным 1 м. По координате z шаг в ледовом покрове составлял 0.1 м., в водном слое — 1 м., в грунтовом слое — 1 м. Шаг по времени, в соответствии с условием устойчивости Куранта, брался равным 10^{-5} с.; всего было выполнено 50 тысяч шагов по времени. Воздействие осуществлялось одиночным источником импульса Рикера, который располагался в центре расчетной области на поверхности ледяного поля. Приемники располагались на поверхности льда в центре расчетной области на расстоянии 10 м. друг от друга и в воде с заглублением 2 м. Схематичное изображение модели можно увидеть на рис. 5.

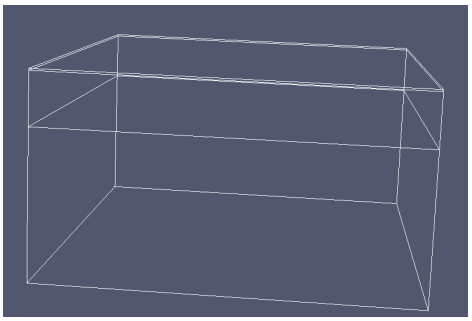
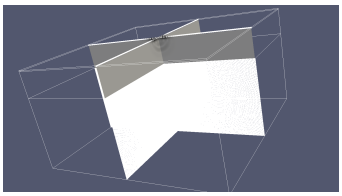
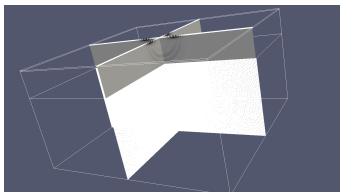


Рис. 5: Схематичное изображение модели с ледяным полем.

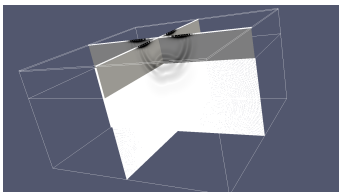
Волновые картины в различные моменты времени приведены на рис. 6. На рисунках 6а, 6б волна проходит через ледовый и водный слой, на рисунках 6в, 6г, 6д, 6е волна проходит сквозь грунтовый слой. На рис. 6г, 6д, 6е заметны кратные волны в слое льда, которые получаются в результате многочисленных переотражений от границы лед-вода и поверхности льда.



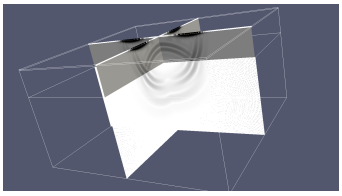
а) Волна в момент времени 0.03 с.



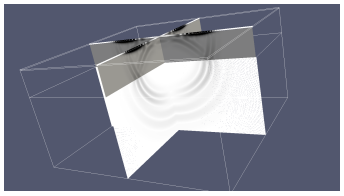
б) Волна в момент времени 0.04 с.



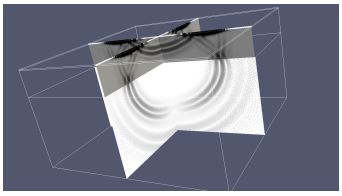
в) Волна в момент времени 0.05 с.



г) Волна в момент времени 0.06 с.



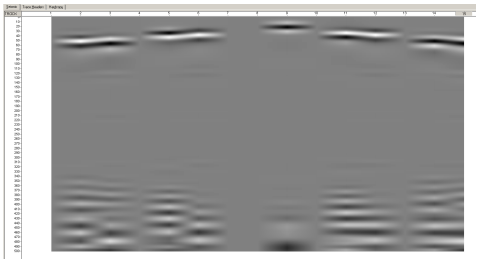
д) Волна в момент времени 0.07 с.



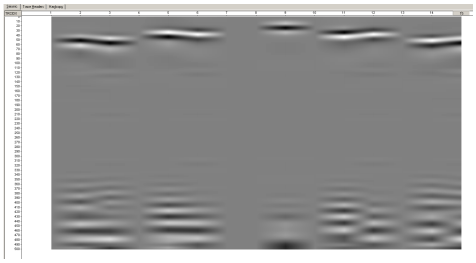
е) Волна в момент времени 0.08 с.

Рис. 6: Волновые картины для модели с ледяным полем в различные моменты времени.

Сейсмограммы по оси z для данной постановки задачи можно увидеть на рис. 7. На рис.7а представлена сейсмограмма в случае установки приемников на поверхности льда, на рисунке 7б – в воде с заглублением 2 м. Хорошо видно, что значительных отличий в сейсмограммах нет. Поэтому при проведении реальных геологоразведочных работ нет необходимости в заглублении приемников, что снижает стоимость проведения такого рода работ.



а) Приемники на поверхности льда.



б) Приемники с заглублением 2 м. под водой.

Рис. 7: Сейсмограммы с различной постановкой приемников в модели с ледяным полем.

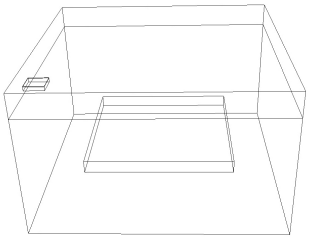
7.3 Исследование сейсмических волновых полей в северных морях при наличии айсбергов

Кроме ледяного поля, в Северных морях встречаются большие ледовые образования – айсберги [16,17,18,19]. Рассматривались модели, содержащие айсберги, водный и грунтовый слой. Айсберги в расчетах представляли собой прямоугольные ледяные конструкции площадью 22500 м^2 и глубиной киля 30 м [20]. Для различных слоев (лед, вода, грунт, нефтегазовое включение) все параметры: плотность, скорость звука продольных и поперечных волн — брались такими же, как в модели с ледяным полем.

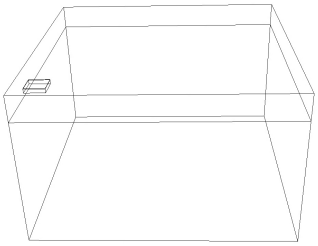
Ширина области интегрирования равнялась 2000×2000 м^2. Толщина слоя воды составляла 200 м., грунтового слоя — 1000 м. Неоднородность размерами 1200 м. на 1200 м. располагалась на расстоянии 700 м. под землей.

Рассматривались две постановки задачи с разным количеством айсбергов: 1) 1 айсберг на значительном расстоянии от точки, откуда осуществлялось воздействие импульсом Рикера (соответственно, две модели: с нефтегазовым включением и без него); 2) 2 айсберга, расположенные на равном расстоянии от точки возмущения импульсом Рикера (аналогично, две модели: с нефтегазовым включением и без него). В обоих случаях айсберги располагались на расстоянии 750 м от точки возмущения. Схематичное изображение четырех моделей можно увидеть на рис. 8:

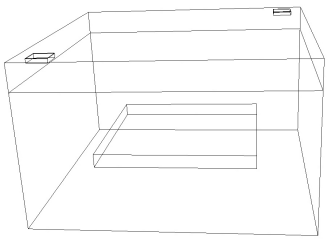
а) модель с 1 айсбергом и нефтегазовым включением;
б) модель с 1 айсбергом без нефтегазового включения;
в) модель с 2 айсбергами и нефтегазовым включением;
г) модель с 2 айсбергами без нефтегазового включения.



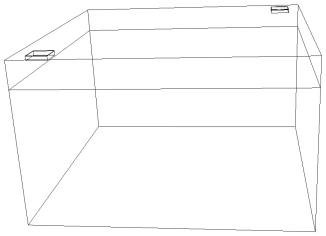
а) Модель с 1 айсбергом и нефтегазовым включением.



б) Модель с 1 айсбергом без нефтегазового включения.



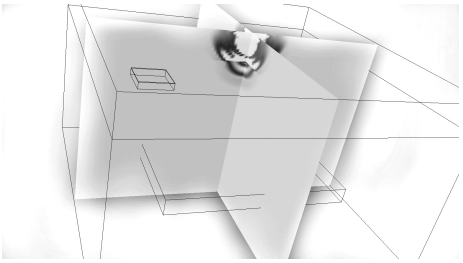
в) Модель с 2 айсбергами и нефтегазовым включением.



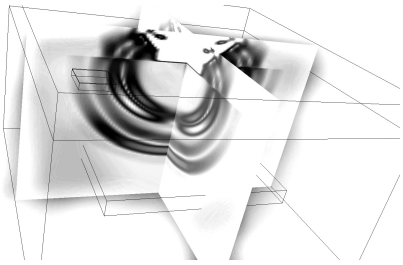
г) Модель с 2 айсбергами без нефтегазового включения.

Рис. 8: Схематичное изображение моделей с айсбергами в начальный момент времени.

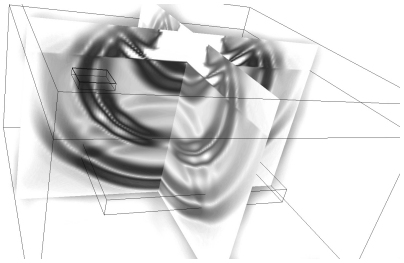
Волновые картины для задачи с одним айсбергом представлены на рис. 9. На рисунке 6а волна проходит через водный слой, на рисунке 6б волна достигает грунтового слоя. На рисунках 6в, 6г волна проходит через нефтегазовый слой, и можно наблюдать отражения от него. На рисунке 6г волна достигла айсберга, видны отражения от этой ледяной неоднородности. Далее, на сейсмограммах будет видно, что айсберг не препятствует получению сейсмограмм для получения отражений от нефтегазового слоя.



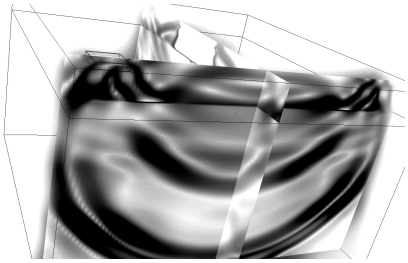
а) Волна в момент времени 0.15 с. в слое – вода .



б) Волна в момент времени 0.35 с. в слоях: вода, грунтовый слой.



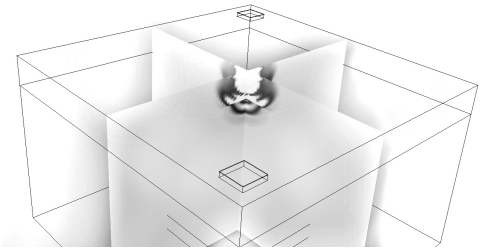
в) Волна в момент времени 0.45 с. в слоях: вода, грунтовый слой.



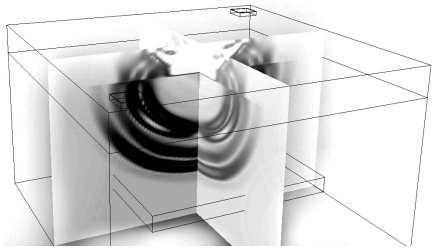
г) Волна в момент времени 0.8 с. в слоях: вода, грунтовый слой.

Рис. 9: Волновые картины в различные моменты времени для модели с одним айсбергом.

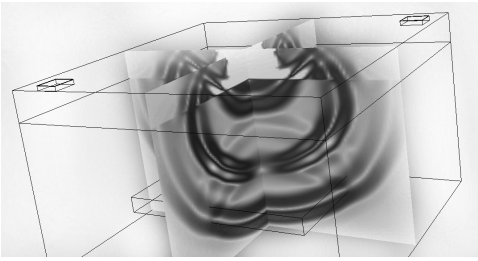
Волновые картины для задачи с двумя айсбергами представлены на рис. 10. На рисунке 10а волна проходит через водный слой, на рисунке 10б волна достигает грунтового слоя; на рисунках 10в, 10г волна проходит через нефтегазовое включение, видны четкие волновые линии отражений от него.



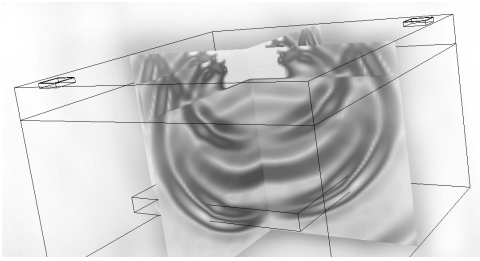
а) Волна в момент времени 0.15 с. в слое – вода .



б) Волна в момент времени 0.35 с. в слоях: вода, грунтовый слой.



в) Волна в момент времени 0.45 с. в слоях: вода, грунтовый слой.

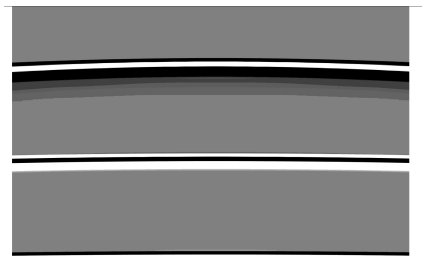


г) Волна в момент времени 0.6 с. в слоях: вода, грунтовый слой.

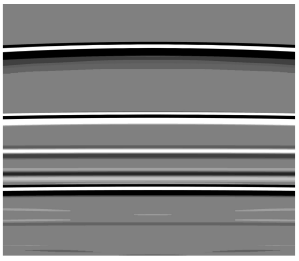
Рис. 10: Волновые картины в различные моменты времени для модели с двумя айсбергами.

Сейсмограммы для данных постановок задач по оси z можно увидеть на рис. 11. На рисунках 11а, 11б приведены показания приемников для случая с 1 айсбергом. Видны различия между случаем наличия нефтегазового включения и его отсутствия в виде дополнительных отражений в нижней части рисунков. В моделях с двумя айсбергами видны такие же четкие различия в наличии/отсутствии неоднородного слоя (рисунки 11в, 11г). Айсберги существенно не повлияли на получение показаний (сейсмологических трасс) от датчиков, так как ледяные неоднородности расположены достаточно далеко от точки воздействия-на расстоянии 750 м.

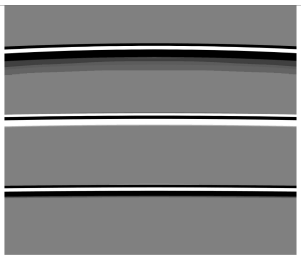
а) Модель с 1 айсбергом и нефтегазовым включением.



б) Модель с 1 айсбергом без нефтегазового включения.



в) Модель с 2 айсбергами и нефтегазовым включением.



г) Модель с 2 айсбергами без нефтегазового включения.

Рис. 11: Показательные сейсмограммы для различия ситуаций присутствия и отсутствия нефтегазового включения в моделях с айсбергами.

7.4 Исследование сейсмических волновых полей в северных морях при наличии торосов

В Северных морях встречаются торосы [18] — большие нагромождения обломков льда, глубина киля которых может достигать 40 – 50 метров [21].

В качестве модели рассматривались водный и грунтовый слой. Для сравнения брались модели с присутствием и отсутствием нефтегазового слоя при наличии тороса в обоих случаях и модель без нефтегазового слоя и тороса, чтобы подробно изучить отражения от нефтегазового слоя и от тороса. В расчетах торос представлял собой совокупность ледяных конструкций с промежутками, заполненными водой. Обычно, киль тороса имеет треугольную форму, но встречается и форма, приведенная на рис. 9г [22]. В расчетах глубина киля тороса составляла 50 м .

Все параметры (плотность, скорость звука) льда, воды, земли, нефтегазового слоя брались аналогичными модели с ледовым покровом.

В расчетах ширина области интегрирования равнялась 2000×2000 м^2. Толщина слоя воды составляла 200 м, грунтового слоя — 1000 м. Неоднородность размерами 1200 м на 1200 м располагалась на расстоянии 700 м под землей.

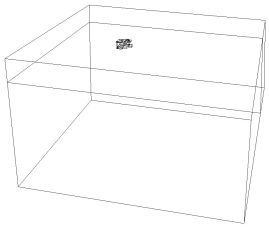
Схематичное изображение моделей можно увидеть на рис. 12:

а) модель с торосом без нефтегазового слоя;

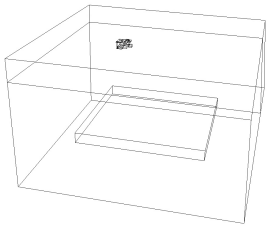
б) модель с торосом и нефтегазовым слоем;

в) модель без тороса и нефтегазового слоя;

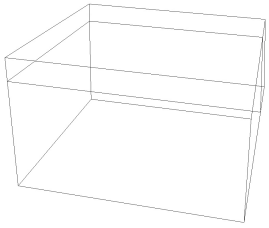
г) модель тороса.



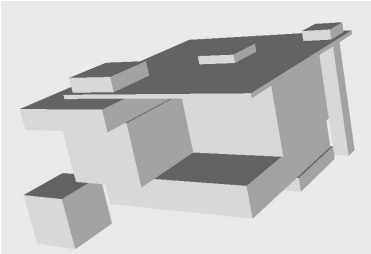
а) Модель с торосом без нефтегазового слоя.



б) Модель с торосом и нефтегазовым слоем.



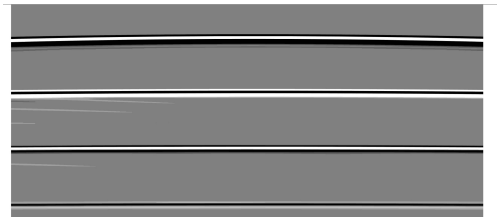
в) Модель без тороса и нефтегазового слоя.



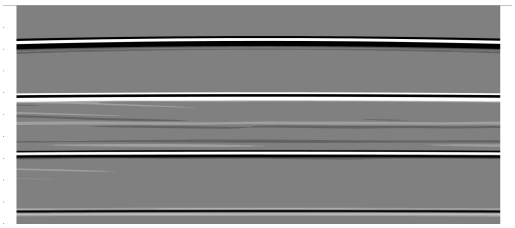
г) Модель тороса.

Рис. 12: Схематичное изображение моделей с торосом.

Сейсмограммы для данных постановок задач по оси z можно увидеть на рис. 13. На рисунках 13а и 13б видно, что торос не дает весомый вклад в сейсмограммы — отражения от слоев воды и земли видны отчетливо. Заметны дополнительные отражения от нефтегазового слоя на рисунке 13б, в отличие от рисунка 13а. Отражения от тороса также видны на обоих рисунках с левой стороны. Отклики с левой стороны на рисунке 13в отсутствуют, так как тороса в данной модели нет.



а) Модель с торосом без нефтегазового слоя.



б) Модель с торосом с нефтегазовым слоем.

в) Модель без тороса и нефтегазового слоя.

Рис. 13: Показательные сейсмограммы для различия ситуаций присутствия и отсутствия нефтегазового слоя и тороса.

8 Результаты

- Разработаны геологические трехмерные модели, состоящие из слоя грунта, слоя воды и нефтесодержащего включения, с различными ледовыми образованиями: ледяным полем, айсбергами, торосом – которые наиболее часто встречаются в зоне Арктического шельфа.
- Выбрана математическая модель для описания различных динамических процессов, происходящих в гетерогенных геологических средах.
- Проведено численное моделирование волновых процессов для моделей с ледяным полем, айсбергами, торосами. Для каждой модели получены волновые картины откликов и сейсмограммы.
- В моделях с ледяным полем показано несущественное влияние ледяного поля на получение отражений от нефтегазового включения.
- Показано, что отличия в полученных сейсмограммах при не заглублении и заглублении приемников несущественны в моделях с ледяным полем.
- Показано несущественное влияние айсбергов, расположенных на значительном расстоянии от приемников – 750 м. – на получение показаний от приемников.
- Получены явные отражения от тороса, нефтегазового включения, слоя морской воды и грунта для моделей с торосом.

9 Заключение

В работе рассматривались трехмерные модели, состоящие из слоя грунта, слоя воды и нефтесодержащего включения, с различными ледовыми образованиями: ледяным полем, айсбергами, торосом – которые наиболее часто встречаются в зоне Арктического шельфа.
Приведена математическая модель для описания различных динамических процессов, происходящих в гетерогенных геологических средах.
Описаны методы расчета, которые используются для численного решения линейно-упругих и акустических задач: ENO–схемы, метод Галеркина. Приведено подробное описание сеточно-характеристического метода, который использовался для последующего вычисления всех приведенных моделей с ледовыми образованиями. Дано описание граничных условий и контактных условий между линейно-упругими и акустическими слоями.

В работе представлен сравнительный анализ моделей с ледяным полем в присутствии и отсутствии нефтегазового включения. Также, рассмотрена более точная модель с ледяным полем – с меньшим шагом по координате в слое льда – с различной постановкой приемников: на поверхности ледяного поля и с заглублением в воде. Существенных различий получено не было.
В работе приведены результаты расчетов моделей с айсбергами, получены волновые картины и сейсмограммы для модели с одним и двумя айсбергами. Результаты расчетов показали, что айсберги, расположенные на значительном расстоянии от точки воздействия ($\sim$ 700 м.) практически не влияют на получение показаний (сейсмологических трасс) от датчиков.
В работе приведена модель тороса, наиболее приближенного к реальности. Были построены сейсмограммы для моделей с торосом, проведен сравнительный анализ для данных моделей.

10 Литература

[1] М. А. Исакович. Общая акустика. Учебное пособие. Издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, М., 1973 г.

[2] Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970.

[3] Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред. Учебник. - М.: Мир, 1974.

[4] Новацкий. Теория упругости. Пер. с польск. Б. Е. Победри. М.: Мир, 1975.

[5] K.M.Magomedov, A.S.Kholodov, *Grid-Characteristic Numerical Methods*, M.:Nauka, 1988.

[6] V.I.Golubev, I.B.Petrov, N.I.Khokhlov, Numerical simulation of seismic activity by the grid-characteristic method, in: *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, V. 53, No10, p.1523 – 1533, 2013.

[7] N.I.Khokhlov, I.B.Petrov, Modeling of seismic events by grid-characteristic method, in: *MIPT transactions*, V. 3, 2011.

[8] A.S.Kholodov, Ya.A.Kholodov, Monotonicity criteria for difference schemes designed for hyperbolic equations, in: *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, V. 46, No9, p.1560 – 1588, 2006.

[9] Григорьевых Д.П. Математическое моделирование разрушений в твердых деформируемых телах сеточно-характеристическим методом. Дипломная работа на степень магистра. Долгопрудный, 2015.

[10] Муратов М.В. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Москва, 2016.

[11] A.V.Favorskaya, D.I.Petrov, N.I.Khokhlov, I.B.Petrov, Numerical solution of elastic-acoustic problems with the help of grid-characteristic method, in: *Vestnik IKBFU*, No 10, p.7 – 12, 2015.

[12] D.P.Grigorievykh, N.I.Khokhlov, I.B.Petrov, Mathematical modeling of cracks in solid deformable bodies using hexahedral grids, in: *MIPT transactions*, V. 7, No4, 2015.

[13] S. V.Frolov, V. E.Fedyakov, V. Yu.Tret'yakov, A. E.Klein, G.V.Alekseev, New data on change in ice thickness in the Arctic Ocean, in: *Doklady Earth Sciences* , V.425, No1, p.104 – 108, 2009.

[14] R.V.Goldstein, N.M.Osipenko, Crack resistance and destructions of ice cover by ice-breakers, in: *AANII transactions*, V.391, p.137 – 156, 1986.

[15] I.B.Petrov, A.V.Favorskaya, I.E.Kvasov, A.V.Sannikov, The methodology of representation and interpretations of the results of fullwave seismic calculations, in: *MIPT transactions*, V.6, No1, p.154 – 161, 2014.

[16] A.T.Bekker, O.A.Sabotash, V.I.Seliverstov, G.I.Koff, E.N.Pipko, Estimation of Lomit Loads on Engineering Offshore Structures, in:*International Society of Offshore and Polar Engineers*, The Nineteenth International Offshore and Polar Engineering Conference, Osaka, Japan, July 21 – 26, p.574 – 579,2009.

[17] R.V.Goldstein, N.M.Osipenko, Crack resistance and destructions of ice cover by ice-breakers, in: *AANII transactions*, V.391, p.137 – 156, 1986.

[18] R.V.Goldstein, N.M.Osipenko, Fracture mechanics of ice and some its applications, in: *Siberian Journal of Pure and Applied Mathematics*, V.12, No4, p.41 – 47, 2012.

[19] S.G.Lee, S.H.Juhand, G.Y.Kong, Modeling and simulation system for marine accident cause investigation, in: *Collision and Graunding of Ships and Offshore Structures – Amdahl, Ehlers and Leira(Eds)*, Taylor and Francis Group,London, p. 39 – 47, 2013.

[20] A.A.Kucheiko, A. Yu.Ivanov, A.A.Davydov, A.Yu.Antonyuk, Iceberg drifting and distribution in the Vilkitsky Strait studied by detailed satellite radar and optical images, in: *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*, V.52, No9, p.1031 – 1040, 2016.

[21] L.Strub-Klein, D.Sudom, A comprehensive analysis of the morphology of first-year sea ice ridges, in: *Cold Regions Science and Technology*, V.82, p.94 – 109, 2012.

[22] A.Marchenko, Thermodynamic consolidation and melting of sea ice ridges, in: *Cold Regions Science and Technology*, V.52, No3, p.278 – 301, 2008.

[23] S.E.Donskoy *The report of the minister of nature resources and ecology of the Russian Federation S.E.Donskogo*, Scientific-Technical problems of opening up the Arctic, p.8 – 13, 2014.

[24]Петров И.Б.,Лобанов А.И. Лекции по вычислительной математике:Учебное пособие-М:Интернет Университет Информационных Технологий;БИНОМ.Лаборатория знаний,2006.

[25]С.Г.Михлин,Вариационные методы решения задач математической физики, УМН, 1950, том 5, выпуск 6(40), 3-51