МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

*Кафедра информатики и вычислительной математики*

# Построение миграционных изображений в упругих средах

Учебно-методическое пособие

Составитель *В.И. Голубев*

МОСКВА
МФТИ
2018

УДК 519.63

Рецензент

Кандидат технических наук *В.К. Хохлов*

**Построение миграционных изображений в упругих средах**: учебно-методическое пособие / сост. В.И. Голубев. – М.: МФТИ, 2018. – 24 с.

Работа посвящена вычислительным алгоритмам построения миграционных изображений гетерогенных геологических сред. Рассматривается формула Кирхгофа и метод Борна, позволяющий линеаризовать связь между наблюдаемыми значениями и параметрами модели. Выкладки проводятся как для акустического приближения, так и для полноволнового упругого описания среды. Предназначается для студентов, изучающих информатику и вычислительную математику, в виде практики по математическому моделированию.

# Содержание

# Построение миграционных изображений в упругих средах

---

## Введение

Ввиду того, что нефть и природный газ являются ключевыми топливными ресурсами, поиск и разведка их месторождений является приоритетной задачей. Для её решения применяются полевые исследования, проводимые с использованием взрывных и вибрационных источников. Основной задачей сейсмической разведки является создание достоверной модели подповерхностного пространства геологической среды. Сейсмическая разведка была применена впервые более ста лет назад и значительно развита и усовершенствована к настощему времени. Можно выделить два основных направления: сейсмическая миграция и сейсмическая инверсия. Результатом процесса инверсии является пространственное распределение параметров среды, тогда как миграция позволяет лишь установить положения отражающих горизонтов (и, возможно, точечных отражателей – трещин, включений). Таким образом, геометрия месторождения углеводородов может быть успешно определена.

Работы [1, 2] можно отнести к одним из первых, посвящённых миграции и построению сейсмических изображений и положивших начало бурному развитию данной области. В дальнейшем в работах [3,4] был предложен подход, названный Kirchhoff Summation Approach, в работе [5] – представлена $k-f$ миграция. В работе [6] проблема построения миграционного изображения сопоставлена с пространственной деконволюцией в области пространственных частот. В последнее время предпринимаются значительные усилия для повышения точности миграционных изображений для сложных геологических сред (например, в условиях соляных куполов [7]). И определённые надежды возлагаются на использование полноволновых подходов к упругой миграции.

Данная работа посвящена проблеме построения миграционных изображений геологических сред. Представлены определяющие уравнения для случая акустического приближения. Приведена формула Кирхгофа, и приближение Борна, позволяющие решить прямую задачу в достаточно простой модели среды. На основе них получены способы построения миграционных изображений: формула Рэлея и присоединённый оператор в приближении Борна. Сформулирован ряд исследовательских задач, позволяющих студентам глубже понять изложенный материал. Также проведено обобщение подхода с приближением Борна на случай упругой среды. Приведены алгоритмы, позволяющие решить прямую задачу и задачу миграции в упругой среде с произвольной структурой.

Значительная часть изложенных в работе результатов получена совместно с Войновым Олегом Ярославовичем, которому автор выражает искреннюю признательность за плодотворную совместную научную работу. Работа выполнена при поддержке стипендии Президента РФ молодым учёным и аспирантам СП-1591.2016.5.

# 1. Акустическое приближение

## 1.1. Определяющие уравнения

Пусть геологическая среда описывается в акустическом приближении, в котором существуют только продольные волны. Тогда она характеризуется одним параметров, зависящим от радиус-вектора и называемым скоростью распространения акустической волны $c$. Если ввести в рассмотрение величину, равную давлению в среде $P(\boldsymbol{r}, t)$, то она удовлетворяет уравнению [8]:

$$\nabla^2 P(\boldsymbol{r}, t) - \frac{1}{c^2(\boldsymbol{r})} \frac{\partial^2}{\partial t^2} P(\boldsymbol{r}, t) = -F^e(\boldsymbol{r}, t). \tag{1}$$

Решение этого уравнения в случае, когда $F^e(\boldsymbol{r}, t)$ - точечный источник (дельта-функция по времени и по пространству), называется функцией Грина, и для однородного бесконечного пространства она может быть записана в виде:

$$G^w(\boldsymbol{r}, t|\boldsymbol{r'}, t') = \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}|} \delta(t - t' - \frac{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}|}{c}), \tag{2}$$

где $\boldsymbol{r'}, t'$ - место расположения источника и время, в которое он начал действовать.

## 1.2. Формула Кирхгофа

В общем случае как для ограниченной, так и для неограниченной области можно записать интегральную связь между полем давления на её границе $S$ ($\boldsymbol{n}$ - внешняя нормаль) и полем в произвольной точке внутри неё. Эта связь называется формулой Кирхгофа и представляется в виде:

$$P(\boldsymbol{r'},t') = \int_S \int_{-\infty}^{+\infty} [G^w(\boldsymbol{r'},t'|\boldsymbol{r},t)\frac{\partial}{\partial n}P(\boldsymbol{r},t) - P(\boldsymbol{r},t)\frac{\partial}{\partial n}G^w(\boldsymbol{r'},t'|\boldsymbol{r},t)]dtds. \quad (3)$$

Здесь штриховые координаты соотвествуют точке, лежащей внутри рассматриваемой области. Подставляя в (3) выражение для формулы Грина в явном виде (2) получим

$$P(\boldsymbol{r'},t') = \frac{1}{4\pi}\int_S [\frac{1}{c|\boldsymbol{r'}-\boldsymbol{r}|}\frac{\partial|\boldsymbol{r'}-\boldsymbol{r}|}{\partial n}\frac{\partial P'}{\partial t'} - \frac{\partial}{\partial n}(\frac{1}{|\boldsymbol{r'}-\boldsymbol{r}|})P' + \frac{1}{|\boldsymbol{r'}-\boldsymbol{r}|}\frac{\partial}{\partial n}P']ds, \quad (4)$$

где $P' = P(\boldsymbol{r}, t' - \frac{|\boldsymbol{r'}-\boldsymbol{r}|}{c})$.

Рассмотрим случай однородного полупространства, ограниченного сверху плоскостью $z = 0$ (стандартные площадные полевые сейсморазведочные работы). В этом случае $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial z}$, следовательно, выражение (4) может быть упрощено до вида:

$$P(\boldsymbol{r'},t') = \frac{1}{4\pi}\int_S [\frac{z'-z}{|\boldsymbol{r'}-\boldsymbol{r}|}(\frac{1}{c}\frac{\partial P'}{\partial t'} + \frac{1}{|\boldsymbol{r'}-\boldsymbol{r}|^2}P') - \frac{1}{|\boldsymbol{r'}-\boldsymbol{r}|}\frac{\partial P'}{\partial z}]ds \quad (5)$$

Разберемся теперь со временной функцией источника. Пусть на поверхность полупространства воздействует давление в виде импульса Риккера:

$$P_{ricker} = P_0(1 - 2\pi^2 f^2 t^2)e^{-\pi^2 f^2 t^2}, \quad (6)$$

тогда функция $P'(\boldsymbol{r'},t')$ может быть записана в виде:

$$P'(\boldsymbol{r'},t') = P(\boldsymbol{r}, t' - \frac{|\boldsymbol{r'}-\boldsymbol{r}|}{c}) = P_0(1 - 2\pi^2 f^2 (t' - \frac{|\boldsymbol{r'}-\boldsymbol{r}|}{c})^2)e^{-\pi^2 f^2 (t' - \frac{|\boldsymbol{r'}-\boldsymbol{r}|}{c})^2}. \quad (7)$$

С учётом (7) аналитически могут быть получены значения

$$\frac{\partial P'}{\partial t'} = -2\pi^2 f^2 P_0(3 - 2\pi^2 f^2 (t' - \frac{|\boldsymbol{r'}-\boldsymbol{r}|}{c})^2)e^{-\pi^2 f^2 (t' - \frac{|\boldsymbol{r'}-\boldsymbol{r}|}{c})^2}, \quad (8)$$

и

$$\frac{\partial P'}{\partial z} = -2\pi^2 f^2 P_0(t' - \frac{|\boldsymbol{r'} - \boldsymbol{r}|}{c})[3 - 2\pi^2 f^2 (t' - \frac{|\boldsymbol{r'} - \boldsymbol{r}|}{c})^2] e^{-\pi^2 f^2 (t' - \frac{|\boldsymbol{r'} - \boldsymbol{r}|}{c})^2} \frac{z' - z}{c|\boldsymbol{r'} - \ldots} \quad (9)$$

Таким образом, может быть рассчитано поле в произвольной точке внутри области, ограниченной поверхностью $S$.

▲ **Исследовательские задания**

1. Повторите выкладки для различных временных зависимостей сигнала-источника: Берлаге, Пузырева, Гельфанда, затухающей синусоиды, колокольной огибающей.

2. Напишите программу, реализующую расчёт акустического поля в среде в соотвествии с формулой Кирхгофа. Рассчитайте поля от точечного источника, плоской продольной волны.

3. Модифицируя разработанную программу, исследуйте вопрос точности численного вычисления поверхностного интеграла с применением различных формул численного интегрирования.

## 1.3. Миграция Кирхгофа

Для случая, когда область интереса представляет собой бесконечное полупространство, ограниченное плоскостью $z = 0$, возможно получить аналитическое выражение, определяющее пространственное распределение скаляра $U^m(\boldsymbol{r'})$, описывающего структуру подповерхностного пространства. Данное соотношение называется формулой Рэлея:

$$U^m(\boldsymbol{r'}) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z'} \int_S \frac{P(\boldsymbol{r}, \frac{2|\boldsymbol{r'} - \boldsymbol{r}|}{c})}{|\boldsymbol{r'} - \boldsymbol{r}|} ds, \quad (10)$$

где $U^m$ - скалярное поле, $P$ - давление на поверхности, $\boldsymbol{r}$ - координата на поверхности, в которой записывается сейсмограмма, $\boldsymbol{r'}$ - координата в объёме, где ищется мигрированное изображение, $c$ - скорость распространения акустической волны.

Рассмотрим простейший случай, когда расчётная сетка кубическая, и на поверхности сейсмоприёмники расположены в каждом её узле. В таком случае формула (10) может быть записана в виде:

$$U^m(i,j,k) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\sum\limits_{l,m}\frac{P(l,m,\frac{2d(i,j,k+1,l,m)}{c})}{d(i,j,k+1,l,m)}\delta x\delta y - \sum\limits_{l,m}\frac{P(l,m,\frac{2d(i,j,k,l,m)}{c})}{d(i,j,k,l,m)}\delta x\delta y}{\delta z}, \tag{11}$$

где $d(i,j,k,l,m) = \sqrt{(l-i)^2(\delta x)^2 + (m-j)^2(\delta y)^2 + (k)^2(\delta z)^2}$, а начало координат находится в точке $(i,j,k) = (0,0,0)$.

▲ **Исследовательские задания**

1. Получите миграционное изображение по сигналу от точечного источника. Для генерации синтетической сейсмограммы используйте формулу Кирхгофа.

2. Сравните результаты, полученные при численном расчёте сейсмограммы и при использовании аналитической зависимости для точечного источника в однородной среде.

## 1.4. Приближение Борна

Представим распределение $c(\boldsymbol{r})$ в области в виде

$$\frac{1}{c^2(\boldsymbol{r})} = \frac{1}{c_b^2(\boldsymbol{r})}(1 + a(\boldsymbol{r})) \tag{12}$$

где $c_b$ - фоновое распределение скорости, а функция $a(\boldsymbol{r})$ задаёт распределение внутри локальной аномальной области $D$, где скорость отлична от фоновой.

Рассмотрим процесс распространения акустических волн в частотной области. Запишем поле давления $p(\boldsymbol{r},\omega)$ в виде суммы двух полей, фонового поля $p^i(\boldsymbol{r},\omega)$ и отражённого $p^s(\boldsymbol{r},\omega)$. Первое из них получено для случая модели с фоновым распределением скорости $c_b(\boldsymbol{r})$, а второе определяется её отличием в области $D$. В таком случае может быть записано интегральное уравнение для отражённого волнового поля

$$p^s(\boldsymbol{r}_j, w) = w^2\int_D G_b^w(\boldsymbol{r}_j|\boldsymbol{r};w)\Delta s^2(\boldsymbol{r})[p^i(\boldsymbol{r},w) + p^s(\boldsymbol{r},w)]dv, \tag{13}$$

в котором $\boldsymbol{r}_j$ - радиус-вектор точки приёмника, $D$ - область, в которой параметр медленности ($s = \frac{1}{c}$) отличается от фоновой медленности ($s_b = \frac{1}{c_b}, \Delta s^2 = \frac{1}{c^2} - \frac{1}{c_b^2}$), $p^i$ - давление, которое создавалось бы в отсутствии неоднородности в области $D$, $G_b^w$ - функция Грина для фоновой медленности.

Приближение Борна получается из приведённого выражения, если в правой части пренебречь величиной отражённого поля относительно фонового. Тогда выражение представляется в виде:

$$p^s(\boldsymbol{r}_j, w) = w^2 \int_D G_b^w(\boldsymbol{r}_j|\boldsymbol{r}; w)\Delta s^2(\boldsymbol{r})p^i(\boldsymbol{r}, w)dv, \tag{14}$$

Рассмотрим случай однородной фоновой модели. Функция Грина в этом случае в частотной области записывается в виде:

$$G_b^w(\boldsymbol{r}_j|\boldsymbol{r}; w) = \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j|} e^{iw\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j|}{c_b}}. \tag{15}$$

Подставляя (15) в формулу (14) получим:

$$p^s(\boldsymbol{r}_j, w) = w^2 \int_D \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j|} e^{iw\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j|}{c_b}} \Delta s^2(\boldsymbol{r})p^i(\boldsymbol{r}, w)dv. \tag{16}$$

Займёмся теперь вычислением $p^i$. Пусть источник возмущения - точечный взрыв, происходящий в нулевой момент времени в точке $\boldsymbol{r}_0$. Тогда в случае однородной среды с фоновой медленностью $s_b$ можно записать решение в виде:

$$p^i(\boldsymbol{r}, w) = \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|} e^{iw\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}{c_b}}. \tag{17}$$

Подставляя (17) в формулу (16) получим:

$$\begin{aligned} p^s(\boldsymbol{r}_j, w) &= w^2 \int_D \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j|} e^{iw\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j|}{c_b}} \Delta s^2(\boldsymbol{r}) \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|} e^{iw\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}{c_b}} dv = \\ &= \frac{w^2}{16\pi^2} \int_D \frac{e^{iw\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|+|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j|}{c_b}}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j||\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|} \Delta s^2(\boldsymbol{r})dv. \end{aligned} \tag{18}$$

Это и является конечной аналитической формулой для вычисления отражённого поля.

В случае произвольной формы области $D$ и распределения в ней медленности $\Delta s^2(\boldsymbol{r})$ данный поверхностный интеграл может быть вычислен численно. Вводя дискретизацию по пространству в виде параллелепипедной сетки с шагами $\delta x, \delta y, \delta z$ и индексами $l, m, p$ формулу (18) можно привести к виду:

$$p^s(\boldsymbol{r}_j, w) = \frac{w^2}{16\pi^2} \sum_{(l,m,p)\in D} \frac{e^{iw\frac{|\boldsymbol{r}_{l,m,p}-\boldsymbol{r}_0|+|\boldsymbol{r}_{l,m,p}-\boldsymbol{r}_j|}{c_b}}}{|\boldsymbol{r}_{l,m,p}-\boldsymbol{r}_j||\boldsymbol{r}_{l,m,p}-\boldsymbol{r}_0|}\Delta s^2_{l,m,p}\delta x\delta y\delta z. \tag{19}$$

Рассмотрим двумерный случай, когда вдоль $Y$ содержится всего одна ячейка. Тогда можно избавиться от индекса $m$, а также сейсмодатчики устанавливаются вдоль одной линии $OX$ и могут быть параметризованы одним индексом $j$. Формула (19) сводится к виду:

$$p^s(x_j, w) = \frac{w^2\delta x\delta z}{16\pi^2} \sum_{(l,p)\in D} \frac{e^{iw\frac{D_{l,p}+d_{j,l,p}}{c_b}}}{D_{l,p}d_{j,l,p}}\Delta s^2_{l,p}, \tag{20}$$

где $D_{l,p} = |\boldsymbol{r}_{l,p} - \boldsymbol{r}_0|$ и $d_{j,l,p} = |\boldsymbol{r}_{l,p} - \boldsymbol{x}_j|$.

Пусть матрица $\Delta s^2_{l,p}$ развернута в $1D$ массив так, что последовательно в нём лежат её строки. И пусть размер модели по $X$ равен $P$, а по $Z$ - $L$. Тогда индекс в массиве имеет вид $ind = p+l*P$, $p \in [0, P-1], l \in [0, L-1]$. Также справедливы равенства: $l = [\frac{ind}{P}]$ и $p = ind - [\frac{ind}{P}] * P$.

С учётом введённой параметризации массива и того факта, что вне неоднородности $\Delta s^2 = 0$, можно записать формулу (20) в виде:

$$p^s(x_j, w) = \sum_{(ind)\in[0,L*P-1]} L_{j,ind}\Delta s^2_{ind}, \tag{21}$$

где матрица $L_{j,ind} = \frac{w^2\delta x\delta z}{16\pi^2}\frac{e^{iw\frac{D_{ind}+d_{j,ind}}{c_b}}}{D_{ind}d_{j,ind}}$, $D_{ind} = \sqrt{(x_{ind}-x_0)^2+(y_{ind}-y_0)^2}$ и $d_{j,ind} = \sqrt{(x_{ind}-x_j)^2+y^2_{ind}}$.

Таким образом, получена линеаризованная связь между данными на приёмниках и параметрами модели.

### ▲ Исследовательские задания

1. Реализуйте компьютерную программу по расчёту синтетических сейсмограмм на основе приближения Борна. Полу-

чите отклик от двухслойной среды с горизонтальной границей раздела и сравните результаты с аналитическими расчётами.

2. Проведите обобщение на трёхмерный случай и получите вид матрицы связи наблюдений и параметров модели.

3. Для случая симметричной системы наблюдений и сферической области $D$ с постоянным значением медленности вычислите аналитически интеграл в (18).

## 1.5. Миграция Борна

Прямая задача сейсморазведки может быть представлена в виде

$$\boldsymbol{d} = \mathbf{L}\boldsymbol{m}. \tag{22}$$

Здесь $\boldsymbol{d}$ – наблюдаемые на сейсмоприемниках данные, $\boldsymbol{m}$ – параметры среды, $\mathbf{L}$ – оператор прямой задачи. Миграционное изображение среды задается выражением

$$\boldsymbol{m}_{migr} = \mathbf{L}^{*}\boldsymbol{d}. \tag{23}$$

Присоединенный оператор $\mathbf{L}^{*}$ определяется как

$$(\boldsymbol{d}, \mathbf{L}\boldsymbol{m}) = (\mathbf{L}^{*}\boldsymbol{d}, \boldsymbol{m}), \quad \forall \boldsymbol{m}, \boldsymbol{d}, \tag{24}$$

где круглыми скобками обозначено скалярное произведение.

Для акустической среды в случае однородной фоновой модели в приближении Борна выражение для отражённого поля (16) с использованием обратного преобразования Фурье может быть записано во временной области в виде

$$p^{s}(\boldsymbol{R}, t) \simeq -\int_{\boldsymbol{r}\in D} \frac{\Delta s^{2}(\boldsymbol{r})}{4\pi\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}\right|} \frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}} p^{i}\left(\boldsymbol{r}, t - s_{b}\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}\right|\right) dV. \tag{25}$$

Пусть источник возмущения – точечный импульс Рикера, возникающий в нулевой момент времени в точке $\boldsymbol{r}_0$:

$$p^{i}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{4\pi\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0\right|} RW\left(t - s_b\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0\right|\right), \tag{26}$$

где
$$RW(t) = \left(1 - 2\pi^2 f_M^2 t^2\right) e^{-\pi^2 f_M^2 t^2}. \qquad (27)$$
Тогда
$$p^s(\boldsymbol{R}, t) = \int_{\boldsymbol{r}\in D} \frac{f_M^2}{2\left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}\right|\left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0\right|} e^{-\tau^2}\left(\tau^4 - 3\tau^2 + \frac{3}{4}\right)\Delta s^2(\boldsymbol{r})\, dV, \qquad (28)$$
где $\tau = \pi f_M \left(t - s_b\left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}\right| - s_b\left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0\right|\right)$.

Будем рассматривать далее случай "нулевого удаления"(zero-offset) источника возмущения от приемника ($\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{R}$)
$$p^s(\boldsymbol{R}, t) = \int_{\boldsymbol{r}\in D} \frac{f_M^2}{2\left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}\right)^2} e^{-\tau^2}\left(\tau^4 - 3\tau^2 + \frac{3}{4}\right)\Delta s^2(\boldsymbol{r})\, dV, \qquad (29)$$
и $\tau = \pi f_M \left(t - 2s_b\left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}\right|\right)$. В соответствии с полученным выражением оператор прямого моделирования $\mathbf{L}$ имеет вид
$$d(\boldsymbol{R}, t) = L(\boldsymbol{R}, t|\boldsymbol{r})\, m(\boldsymbol{r}) = \int_{\boldsymbol{r}\in D} \frac{f_M^2}{2\left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}\right)^2} e^{-\tau^2}\left(\tau^4 - 3\tau^2 + \frac{3}{4}\right) m(\boldsymbol{r})\, dV, \qquad (30)$$
а сопряженный к нему оператор $\mathbf{L}^*$ –
$$m(\boldsymbol{R}) = L^*(\boldsymbol{R}|\boldsymbol{r}, t)\, d(\boldsymbol{r}, t) = \int_{t_{min}}^{t_{max}} \int_{\boldsymbol{r}\in S} \frac{f_M^2}{2\left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}\right)^2} e^{-\tau^2}\left(\tau^4 - 3\tau^2 + \frac{3}{4}\right) d(\boldsymbol{r}, t) \qquad (31)$$
где $S$ – принадлежит границе области $G$, а $(t_{min}, t_{max})$ – некоторый временной диапазон.

▲ **Исследовательские задания**

1. Как изменятся выражения (30) и (31), если временную функцию источника заменить на импульс Берлаге.

2. Получите выражение для оператора $\mathbf{L}$ и для сопряжённого оператора $\mathbf{L}^*$ в частотной области.

3. Напишите программу, вычисляющую миграционное изображение среды в 2D постановке. Верифицируйте результат на простейших моделях неоднородных сред.

# 2. Упругое приближение

## 2.1. Определяющие уравнения и приближение Борна

Динамическое поведение упругой среды задается уравнением Ламе в следующем виде

$$\mathbf{\Lambda}\boldsymbol{u} - \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{F}, \quad \mathbf{\Lambda} = c_p^2\, \nabla\, \nabla\cdot - c_s^2\, \nabla\times\, \nabla\times\, .$$

Разложим параметры среды в некоторой области $V$ на фоновые (*background*) и добавочные ($\Delta$) составляющие, а поле на первичное (*initial*) и вторичное (*secondary*) и условимся обозначать нижним греческим индексом потенциальные (*potential*) и соленоидальные (*solenoidal*) компоненты полей, подразумевая, что полная величина поля (без индекса) есть их сумма[1]:

$$\begin{aligned} &c_\alpha^2 = c_{\alpha,b}^2 + \Delta c_\alpha^2, && \mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}_b + \Delta\mathbf{\Lambda}, \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^i + \boldsymbol{u}^s, \\ &\mathbf{\Lambda}_b \boldsymbol{u}^i - \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}^i}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{F}, && \mathbf{\Lambda}_b \boldsymbol{u}^s - \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}^s}{\partial t^2} = -\Delta\mathbf{\Lambda}\left(\boldsymbol{u}^i + \boldsymbol{u}^s\right). \end{aligned} \tag{32}$$

Введем дополнительные обозначения: медленность среды $s = c^{-1}$ и операторы $\hat{\mathbf{D}}_p = \nabla\, \nabla\cdot$ и $\hat{\mathbf{D}}_s = -\, \nabla\times\, \nabla\times$.

Если обозначить

$$\hat{\mathbf{g}}_\alpha = \left\{\chi\left(t' - t - s_{\alpha,b}\left|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}\right|\right) - \chi\left(t' - t\right)\right\} \frac{\hat{\mathbf{I}}}{4\pi\left|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}\right|},$$

где $\hat{\mathbf{I}}$ – единичный тензор и $\chi(t) = \max(0, t)$, то тензор Грина для полученных уравнений в случае постоянных фоновых скоростей звука $c_{\alpha,b} = \mathrm{const}$ примет вид

$$\hat{\mathbf{G}}_\alpha^L\left(\boldsymbol{r}', t'|\boldsymbol{r}, t\right) = \hat{\mathbf{D}}_\alpha \hat{\mathbf{g}}_\alpha = \hat{\mathbf{D}}_\alpha' \hat{\mathbf{g}}_\alpha,$$

[1] Для некоторых величин, для которых это не вызовет недоразумения, в том числе для скалярных, будем таким образом обозначать соответствие либо волнам сжатия (*pressure*), либо сдвиговым волнам (*shear*).

а первичное и вторичное поля будут задаваться выражениями

$$\boldsymbol{u}_\alpha^i(\boldsymbol{r}',t') = \int_V \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\rho(\boldsymbol{r})} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},t) \cdot \hat{\mathbf{G}}_\alpha^L(\boldsymbol{r}',t'|\boldsymbol{r},t)\, dtdV,$$
$$\boldsymbol{u}_\alpha^s(\boldsymbol{r}',t') = \int_V \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{\Delta\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{r})\left[\boldsymbol{u}^i(\boldsymbol{r},t)+\boldsymbol{u}^s(\boldsymbol{r},t)\right]\right\} \cdot \hat{\mathbf{G}}_\alpha^L(\boldsymbol{r}',t'|\boldsymbol{r},t)\, dtdV. \tag{33}$$

В приближении Борна пренебрежем $\boldsymbol{u}^s$ в правой части последнего выражения, и оператор прямого моделирования примет вид [9, 10]

$$\boldsymbol{u}_\alpha^{s,B}(\boldsymbol{r}',t') = \int_V \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{\Delta c_p^2(\boldsymbol{r})\,\nabla^2 \boldsymbol{u}_p^i(\boldsymbol{r},t) + \Delta c_s^2(\boldsymbol{r})\,\nabla^2 \boldsymbol{u}_s^i(\boldsymbol{r},t)\right\} \cdot$$
$$\cdot \hat{\mathbf{G}}_\alpha^L(\boldsymbol{r}',t'|\boldsymbol{r},t)\, dtdV, \tag{34}$$

где учтены свойства потенциальных и соленоидальных полей $\hat{\mathbf{D}}_\alpha \boldsymbol{u}_\alpha^i = \nabla^2 \boldsymbol{u}_\alpha^i$.

Введем гильбертово пространство данных волнового поля, заданных на множестве точек $S$ в моменты времени $T$, со скалярным произведением

$$(\boldsymbol{d}_1 \cdot \boldsymbol{d}_2) = \int_S \int_T \boldsymbol{d}_1(\boldsymbol{r}',t) \cdot \boldsymbol{d}_2(\boldsymbol{r}',t)\, dtS,$$

и гильбертово пространство моделей, заданных в объеме $V$, со скалярным произведением

$$(\boldsymbol{m}_1 \cdot \boldsymbol{m}_2) = \int_V \left[\Delta c_{p,1}^2(\boldsymbol{r})\,\Delta c_{p,2}^2(\boldsymbol{r}) + \Delta c_{s,1}^2(\boldsymbol{r})\,\Delta c_{s,2}^2(\boldsymbol{r})\right] dV,$$
$$\boldsymbol{m}_i = \left(\Delta c_{p,i}^2,\ \Delta c_{s,i}^2\right)^{\mathrm{T}}.$$

Оператор миграции, сопряженный к оператору прямого моделирования, задается выражением

$$\Delta c_{\alpha,\mathrm{migr}}^2(\boldsymbol{r}) = \int_S \int_T \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{\nabla^2 \boldsymbol{u}_\alpha^i(\boldsymbol{r},t)\right\} \cdot \hat{\mathbf{G}}^L(\boldsymbol{r}',t'|\boldsymbol{r},t) \cdot \boldsymbol{d}(\boldsymbol{r}',t')\, dtdt'dV'. \tag{35}$$

## 2.2. Точечный источник с постоянной поляризацией

Пусть поле возбуждается точечным источником с постоянной поляризацией:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, t) = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) F(t) \boldsymbol{f} = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) f''(t) \boldsymbol{f}.$$

Например, для импульса Рикера

$$F(t) = \left(1 - 2\pi^2 f_M^2 t^2\right) e^{-\pi^2 f_M^2 t^2}, \quad f(t) = -\frac{e^{-\pi^2 f_M^2 t^2}}{2 f_M^2 \pi^2}. \tag{36}$$

Заметим, что имеет место соотношение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi(t' - t) f''(t) dt = \int_0^{+\infty} f''(t' - t) t dt = \left[ f(t' - t) + f'(t' - t) t \right]\Big|_{t=+\infty}^{0}$$

которое для "хороших"импульсов упрощается до $f(t')$, а для постоянного вектора $\boldsymbol{f}$ и произвольной функции координат $g(\boldsymbol{r})$ справедливо

$$\boldsymbol{f} \cdot \left[ \hat{\mathbf{D}}_\alpha \left( g(\boldsymbol{r}) \hat{\mathbf{I}} \right) \right] = \left[ \hat{\mathbf{D}}_\alpha \left( g(\boldsymbol{r}) \hat{\mathbf{I}} \right) \right] \cdot \boldsymbol{f} = \hat{\mathbf{D}}_\alpha (g(\boldsymbol{r}) \boldsymbol{f}).$$

С учетом последнего первичное поле задается выражениями

$$\tilde{\boldsymbol{f}}_\alpha(\boldsymbol{r}, t) = \frac{f(t - s_{\alpha,b} |\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}|) - f(t)}{4\pi\rho(\boldsymbol{r}_0) |\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}|} \boldsymbol{f}, \quad \boldsymbol{u}_\alpha^i(\boldsymbol{r}, t) = \hat{\mathbf{D}}_\alpha \tilde{\boldsymbol{f}}_\alpha(\boldsymbol{r}, t). \tag{37}$$

Используя равенства

$$\{ f(t) - f(t - s_{\alpha,b} |\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}|) \} \nabla^2 \frac{1}{|\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}|} = 0,$$

$$\nabla^2 \frac{f(t - s_{\alpha,b} |\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}|) - f(t)}{|\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}|} = \frac{F(t - s_{\alpha,b} |\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}|)}{c_{\alpha,b}^2 |\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}|},$$

можно упростить комбинации $\nabla^2 \boldsymbol{u}_p^i$, $\nabla^2 \boldsymbol{u}_s^i$, входящие в выражения для операторов прямой и обратной задач:

$$\nabla^2 \boldsymbol{u}_\alpha^i(\boldsymbol{r}, t) = \hat{\mathbf{D}}_\alpha \frac{F(t - s_{\alpha,b} |\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}|) \boldsymbol{f}}{4\pi c_{\alpha,b}^2 \rho(\boldsymbol{r}_0) |\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}|} = \frac{1}{\rho(\boldsymbol{r}_0)} \hat{\mathbf{D}}_\alpha^0 \frac{F(t - s_{\alpha,b} |\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}|) \boldsymbol{f}}{4\pi c_{\alpha,b}^2 |\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}|}.$$

Получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \nabla^2 \boldsymbol{u}_\beta^i (\boldsymbol{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{G}}_\alpha^L (\boldsymbol{r}', t' | \boldsymbol{r}, t)\, dt$$

$$= \frac{1}{\rho(\boldsymbol{r}_0)} \hat{\mathbf{D}}_\alpha^{\prime} \hat{\mathbf{D}}_\beta^{0} \frac{f\left(t' - s_{\beta,b} |\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}| - s_{\alpha,b} |\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}|\right)}{16\pi^2 c_{\beta,b}^2 |\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}|\, |\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}|} \boldsymbol{f}.$$

С учетом этого, выражение для оператора прямого моделирования примет вид

$$\boldsymbol{u}_\alpha^{s,B} (\boldsymbol{r}', t') = \sum_\beta \frac{1}{\rho(\boldsymbol{r}_0)} \hat{\mathbf{D}}_\alpha^{\prime} \hat{\mathbf{D}}_\beta^{0} \int_V \Delta c_\beta^2 (\boldsymbol{r}) \frac{f\left(t' - s_{\beta,b} |\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}| - s_{\alpha,b} |\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}|\right)}{16\pi^2 c_{\beta,b}^2 |\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}|\, |\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}|} \boldsymbol{f} dV, \tag{38}$$

а выражение для миграционного оператора – вид

$$\Delta c_{\beta,\mathrm{migr}}^2 (\boldsymbol{r}) = \sum_\alpha \int_{V'} \int_T \frac{1}{\rho(\boldsymbol{r}_0)} \boldsymbol{d} (\boldsymbol{r}', t') \cdot \hat{\mathbf{D}}_\alpha^{\prime} \hat{\mathbf{D}}_\beta^{0} \frac{f\left(t' - s_{\beta,b} |\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}| - s_{\alpha,b} |\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}|\right)}{16\pi^2 c_{\beta,b}^2 |\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}|\, |\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}|} \boldsymbol{f} dt' dV'. \tag{39}$$

**▲ Исследовательские задания**

1. Напишите программу, реализующую расчёт упругого поля в среде в приближении Борна. Рассчитайте поля от точечного источника, плоской продольной и поперечной волны.

2. Напишите программу, реализующую расчёт миграционного изображения по площадным данным упругого поля. Протестируйте её на аналитических и полученных численным расчётом сейсмограммах.

## 2.3. Вычислительная сложность и переход в частотную область

Рассмотрим полученные формулы с точки зрения вычислительной сложности в случае, когда приемники расположены на горизонтальной плоскости через равные промежутки вдоль каждой из горизонтальных координат. При нулевом удалении (*zero-offset*) после действия операторов $\hat{\mathbf{D}}^{\prime}$, $\hat{\mathbf{D}}^{0}$ нужно заменить $\boldsymbol{r}_0$

на $\boldsymbol{r}'$. После этого можно эффективно вычислять сверточные интегралы с использованием быстрого преобразования Фурье ($FFT$). При этом вычислительная сложность формул получается $O\left(n_t n_z n_x n_y \log n_x \log n_y\right)$. То же касается и случая постоянного удаления, когда $\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}' = \mathrm{const}$.

В случае фиксированного положения источника применение FFT непосредственно к конечным формулам возможно, если функция источника обладает свойством $f(t+T) = f(t)f(T)$. Например, импульс Рикера таким свойством не обладает, и вычислительная сложность формул оказывается равной $O\left(n_t n_z n_x^2 n_y^2\right)$. Однако можно воспользоваться свойством преобразования Фурье

$$f^F[t+T](\omega) = \int e^{-i\omega t} f(t+T)dt = e^{i\omega T} f^F[t](\omega)$$

и тогда итоговые формулы примут следующий вид

$$\begin{gathered}\boldsymbol{u}_\alpha^{s,B,F}\left(\boldsymbol{r}',\omega\right) = \sum_\beta \frac{f^F\left(\omega\right)}{\rho\left(\boldsymbol{r}_0\right)} \hat{\mathbf{D}}_\alpha' \hat{\mathbf{D}}_\beta^0 \int_V \Delta c_\beta^2\left(\boldsymbol{r}\right) \\ \frac{\exp\left(-i\omega s_{\beta,b}\left|\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}\right| - i\omega s_{\alpha,b}\left|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}\right|\right)}{16\pi^2 c_{\beta,b}^2 \left|\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}\right|\left|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}\right|} \boldsymbol{f} dV,\end{gathered} \tag{40}$$

$$\begin{gathered}\Delta c_{\beta,\mathrm{migr}}^2\left(\boldsymbol{r}\right) = \sum_\alpha \int_{V'} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f^F\left(\omega\right)}{\rho\left(\boldsymbol{r}_0\right)} \boldsymbol{d}^F\left(\boldsymbol{r}',-\omega\right) \cdot \\ \cdot \hat{\mathbf{D}}_\alpha' \hat{\mathbf{D}}_\beta^0 \frac{\exp\left(-i\omega s_{\beta,b}\left|\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}\right| - i\omega s_{\alpha,b}\left|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}\right|\right)}{32\pi^3 c_{\beta,b}^2 \left|\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}\right|\left|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}\right|} \boldsymbol{f} d\omega dV',\end{gathered} \tag{41}$$

после чего можно применять быстрое преобразование Фурье[2].

## 2.4. Формулы для полупространства

Пусть фоновые медленности постоянны в полупространстве $z > 0$ и поверхность $z = 0$ является свободной, то есть на ней отсутствуют нормальные и касательные напряжения:

$$2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda \nabla \cdot \boldsymbol{u} = \mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\right) = \mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) = 0.$$

[2]Последняя формула справедлива строго, если продление интегрирования по $t'$ на всю числовую ось не изменяет значения интеграла.

Тогда тензор Грина принимает вид

$$\hat{\mathbf{G}}_\alpha^{L,H}(\boldsymbol{r}',t'|\boldsymbol{r},t) = \hat{\mathbf{D}}_\alpha'\left[\hat{\mathbf{g}}_\alpha - \underline{\hat{\mathbf{g}}_\alpha}\right],$$

$$\underline{\hat{\mathbf{g}}_\alpha} = \{\chi(t'-t-s_{\alpha,b}|\boldsymbol{r}'-\underline{\boldsymbol{r}}|) - \chi(t'-t)\}\frac{\hat{\mathbf{I}}}{4\pi|\boldsymbol{r}'-\underline{\boldsymbol{r}}|},\quad \underline{\boldsymbol{r}} = (x,\,y,\,-z)^{\mathrm{T}}.$$

Рассуждая аналогично предыдущему, получим выражения для первичного поля:

$$\begin{gathered}
\tilde{\boldsymbol{f}}_\alpha(\boldsymbol{r},t) = \frac{f(t-s_{\alpha,b}|\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r}|) - f(t)}{4\pi\rho(\boldsymbol{r}_0)|\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r}|}\boldsymbol{f} - \\
-\frac{f\left(t-s_{\alpha,b}\left|\underline{\boldsymbol{r}_0}-\boldsymbol{r}\right|\right) - f(t)}{4\pi\rho(\boldsymbol{r}_0)\left|\underline{\boldsymbol{r}_0}-\boldsymbol{r}\right|}\boldsymbol{f}, \\
\boldsymbol{u}_\alpha^i(\boldsymbol{r},t) = \hat{\mathbf{D}}_\alpha\tilde{\boldsymbol{f}}_\alpha(\boldsymbol{r},t) = \hat{\mathbf{D}}_\alpha^0\frac{f(t-s_{\alpha,b}|\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r}|) - f(t)}{4\pi\rho(\boldsymbol{r}_0)|\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r}|}\boldsymbol{f} - \\
-\underline{\hat{\mathbf{D}}_\alpha^0}\frac{f\left(t-s_{\alpha,b}\left|\underline{\boldsymbol{r}_0}-\boldsymbol{r}\right|\right) - f(t)}{4\pi\rho(\boldsymbol{r}_0)\left|\underline{\boldsymbol{r}_0}-\boldsymbol{r}\right|}\boldsymbol{f},
\end{gathered} \tag{42}$$

где $\underline{\hat{\mathbf{D}}_\alpha^0}$ получается из $\hat{\mathbf{D}}_\alpha^0$ заменой $\partial_{z_0}$ на $-\partial_{z_0}$; выражения для операторов прямой и обратной задач:

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{u}_\alpha^{s,B}(\boldsymbol{r}',t') = \sum_\beta \frac{1}{\rho(\boldsymbol{r}_0)}\hat{\mathbf{D}}_\alpha'\int_V \Delta c_\beta^2(\boldsymbol{r})\sum_{\boldsymbol{r}_1\in\{\boldsymbol{r},\,\underline{\boldsymbol{r}}\}} k_{\boldsymbol{r}_1} \\
(\hat{\mathbf{D}}_\beta^0\frac{f(t'-s_{\beta,b}|\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r}| - s_{\alpha,b}|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_1|)}{16\pi^2 c_{\beta,b}^2|\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r}||\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_1|} - \\
-\underline{\hat{\mathbf{D}}_\beta^0}\frac{f(t'-s_{\beta,b}|\boldsymbol{r}_0-\underline{\boldsymbol{r}}| - s_{\alpha,b}|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_1|)}{16\pi^2 c_{\beta,b}^2|\boldsymbol{r}_0-\underline{\boldsymbol{r}}||\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_1|})\boldsymbol{f}dV,
\end{gathered} \tag{43}$$

$$\begin{gathered}
\Delta c_{\beta,\mathrm{migr}}^2(\boldsymbol{r}) = \sum_\alpha\int_{V'}\int_T \frac{1}{\rho(\boldsymbol{r}_0)}\boldsymbol{d}(\boldsymbol{r}',t')\cdot\hat{\mathbf{D}}_\alpha'\sum_{\boldsymbol{r}_1\in\{\boldsymbol{r},\,\underline{\boldsymbol{r}}\}} k_{\boldsymbol{r}_1} \\
(\hat{\mathbf{D}}_\beta^0\frac{f(t'-s_{\beta,b}|\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r}| - s_{\alpha,b}|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_1|)}{16\pi^2 c_{\beta,b}^2|\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r}||\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_1|} - \\
-\underline{\hat{\mathbf{D}}_\beta^0}\frac{f(t'-s_{\beta,b}|\boldsymbol{r}_0-\underline{\boldsymbol{r}}| - s_{\alpha,b}|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_1|)}{16\pi^2 c_{\beta,b}^2|\boldsymbol{r}_0-\underline{\boldsymbol{r}}||\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_1|})\boldsymbol{f}dt'dV',
\end{gathered} \tag{44}$$

где $k_{\boldsymbol{r}} = 1$, $k_{\underline{\boldsymbol{r}}} = -1$.

**▲ Исследовательские задания**

1. Напишите программу, реализующую численное решение прямой сейсмической задачи для случая полупространства.

2. Напишите программу для построения миграционного изображения для случая полупространства.

## 2.5. Произвольная фоновая модель среды

Согласно изложенному выше для построения как решения прямой сейсмической задачи, так и миграционного изображения необходимо знать функцию Грина для фоновой модели. К сожалению, аналитически либо полу-аналитически она может быть найдена лишь для простейших случаев, таких как однородная среда, слоистая среда. Как правило, данных моделей недостаточно для того, чтобы адекватно описать реальную геологическую среду. В связи с этим необходимо использовать другие подходы к решению этих задач. Одним из таковых является построение оператора $L$ в рамках конечно-разностных либо конечно-объёмных расчётных схем.

Для решения прямых задач сейсмической разведки в последние годы хорошо себя зарекомендовал сеточно-характеристический численный метод на структурных и неструктурных сетках [11, 12]. Он позволяет для заданных источников, приемников и произвольного распределения параметров среды получить синтетические сейсмограммы и найти в исследуемой области поле скоростей смещения. Рассмотрим подробнее способ построения миграционного изображения среды по получаемым в процессе сейсмической разведки полевым данным. Близость приближенного решения (вектор распределения параметров модели по пространству) обратной задачи к истинной модели среды можно оценить с использованием функционала невязки в следующем виде

$$\chi(\boldsymbol{m}) = \frac{1}{2}\sum_r \int \|\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x}_r, t; \boldsymbol{m}) - \boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}_r, t)\|^2 dt \qquad (45)$$

Здесь $\boldsymbol{x}_r$ – положение $r$-го приёмника, $\boldsymbol{s}$ и $\boldsymbol{d}$ – синтетическая и полевая сейсмограммы скорости смещения, суммирование ведется по всем приёмникам. В случае, когда полевые данные представляют собой набор сейсмограмм для разных конфигураций источников, можно выбрать $\boldsymbol{d}$ так, что показания одного сейсмометра из $\boldsymbol{d}$ будут суммой показаний этого сейсмометра по всему набору. Заметим, что соответствующие синтетические сейсмограммы могут быть получены в результате моделирования, в котором источник задан как одновременное действие источников, расположенных в местах расположения сейсмоприёмников при полевом исследовании. Это возможно в силу линейности по внешнему возмущению уравнений линейной динамической теории упругости. В работе [13] для изотропной упругой среды вариация функционала невязки вычислена с помощью одного из следующих интегралов по всему пространству:

$$\delta\chi = \int (K_\rho \delta \ln \rho + K_K \delta \ln K + K_\mu \delta \ln \mu) d^3\boldsymbol{x} \tag{46}$$

$$\delta\chi = \int (K_Z \delta \ln Z + K_{C_P} \delta \ln C_P + K_{C_S} \delta \ln C_S) d^3\boldsymbol{x} \tag{47}$$

где $\rho$ – плотность среды, $K$ и $\mu$ – модуль всестороннего сжатия и модуль сдвига, $C_P$ и $C_S$ – скорости продольной и поперечной волн, $Z = \rho C_P$ – импеданс сжатия, $K_\alpha$ – ядро параметра $\alpha$. В указанной работе миграционное изображение формируется по ядру импеданса $K_Z$, которое определяется из выражений

$$\begin{gathered}
K_Z = K_\rho + K_K + K_\mu \\
K_\rho(\boldsymbol{x}) = \rho(\boldsymbol{x}) \int v^\dagger(\boldsymbol{x}, -t) v(\boldsymbol{x}, t) dt \\
K_K(\boldsymbol{x}) = -K(\boldsymbol{x} \int [\nabla \cdot \boldsymbol{s}^\dagger(\boldsymbol{x}, -t)][\nabla \cdot \boldsymbol{s}(\boldsymbol{x}, t)] dt \\
K_\mu(\boldsymbol{x}) = -2\mu(\boldsymbol{x}) \int \boldsymbol{D}^\dagger(\boldsymbol{x}, -t) : \boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}, t) dt \\
\boldsymbol{D} = \frac{\nabla \boldsymbol{s} + (\nabla \boldsymbol{s})^T}{2} - \frac{\nabla \cdot \boldsymbol{s}}{3} \boldsymbol{I}, \boldsymbol{D}^\dagger : \boldsymbol{D} = \sum_{i,j} D_{ij}^\dagger D_{ij}
\end{gathered} \tag{48}$$

Здесь $\boldsymbol{s}$ и $\boldsymbol{v}$ – смещение и скорость, $\boldsymbol{s}^\dagger$ и $\boldsymbol{v}^\dagger$ – сопряженные величины, $\boldsymbol{I}$ – единичный тензор, и в выражениях фигурируют параметры фоновой модели среды. Для получения сопряженного поля скоростей используется сопряженный источник:

$$\boldsymbol{f}^\dagger(\boldsymbol{x}, t) = \sum_r [\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x}_r, -t) - \boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}, -t)] \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_r) \tag{49}$$

При этом решение данной системы также проводится численно тем же самым методом, что решалась прямая задача.

Таким образом, построение миграционного изображения производится в несколько этапов. Сначала для фоновой модели среды решается прямая задача с конфигурацией источников и приемников, соответствующей произведённым наблюдениям. В результате этого получаются синтетические поля и сейсмограммы. Последние вместе с полевыми сейсмограммами используются на втором этапе для моделирования сопряженного поля. Наконец синтетическое и сопряженное поля используются для расчета ядер и ядра импеданса, в частности.

Описанный метод, по-видимому, обладает большими перспективами. В частности, он продемонстрировал возможность построения миграционных изображений трещиноватых геологических сред, в том числе с использованием априорной информации о трещиноватой структуре среды [14].

**▲ Исследовательские задания**

1. Напишите программу для построения миграционного изображения с использованием изложенного подхода (48).

2. Протестируйте написанную программу на аналитических решениях и на численных решениях, полученных в приближении Борна.

# Литература

1. *Claerbout J.F.* Coarse grid calculations of waves in inhomogeneoues media with application to delineation of complicated seismic structures // Geophysics, 1961. - V. 36, I. 3. P. 407-418.

2. *Claerbout J.F., Doherty S.M.* Downward continuation os moveout-corrected seismograms // Geophysics, 1972. - V. 37, I. 5. P. 741-768.

3. *French W.S.* Computer migration of oblique seismic reflection profiles // Geophysics, 1975. - V. 40, I. 6. P. 961-980.

4. *Schneider W.A.* Integral formulaion for migration in two-dimensions and three-dimensions // Geophysics, 1978. - V. 43, I. 1. P. 49-76.

5. *Stolt R.H.* Migration by fourier transform // Geophysics, 1978. - V. 43, I. 1. P. 23-48.

6. *Berkhout A.J., Van Wulfften Palthe* Migration in terms of spatial deconvolution // Geophysical Prospecting, 1979. - V. 27, I. 1. P. 261-291.

7. *Jiao K. et al.* Elastic migration for improving salt and subsalt imaging and inversion // SEG Las Vegas Annual Meeting. 2012.

8. *Zhdanov M.S.* Geophysical Inverse Theory and Regularization Problems // Methods in Geochemistry and Geophysics. Vol. 36. Elsevier Science. 2002.

9. *Войнов О.Я., Голубев В.И., Петров И.Б., Жданов М.С.* Построение метода упругой миграции сейсмических данных в приближении Борна // Труды МФТИ, 2016. - Т. 8, № 2. С. 60-66.

10. *Voinov O.Ya., Golubev V.I., Petrov I.B.* Elastic imaging using multiprocessor computer systems // CEUR Workshop Proceedings, 2016. - V. 1787. P. 491-495.

11. *Петров И.Б., Холодов А.С.* Численное исследование некоторых динамических задач механики деформируемого твёрдого тела сеточно-характеристическим методом // Ж. вычисл. матем. физ., 1984. - Т. 24, № 5. С. 722-739.

12. *Голубев В.И., Петров И.Б., Хохлов Н.И., Шульц К.И.* Численный расчет волновых процессов в трещиноватых средах на гексаэдральных сетках сеточно-характеристическим методом // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2015. - Т. 55, № 3. С. 512–522.

13. *Luo Y., Tromp J., Denel B., Calandra H.* 3D coupled acoustic-elastic migration with topography and bathymetry based on spectral-element and adjoint methods // Geophysics, 2013. – V. 78, I. 4. P. S193–S202.

14. *Голубев В.И., Войнов О.Я., Журавлёв Ю.И.* О построении миграционных изображений трещиноватых геологических сред // ДАН, 2017. - Т. 476, № 2. С. 140-142.

Учебное издание

# ПОСТРОЕНИЕ МИГРАЦИОННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ В УПРУГИХ СРЕДАХ

Методические указания

по курсу *Информатика и вычислительная математика*

Составитель **Голубев** Василий Иванович

Редактор *О.П. Котова*. Корректор *Л.В. Себова*
Компьютерная верстка *Н.Е. Кобзева*

Подписано в печать 24.01.2013. Формат 60×84 $^1/_{16}$.
Усл. печ. л. 3,25. Уч.-изд.л. 3,0. Тираж 120 экз. Заказ №17.

---

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт(государственный университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
E-mail: rio@mail.mipt.ru

---

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
E-mail: polygraph@mipt.ru