

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(государственный университет)»**



«УТВЕРЖДАЮ»

**Проректор по учебной работе
и довузовской подготовке**

_____ **А.А. Воронов**

Рабочая программа дисциплины (модуля):

по дисциплине: Практикум по вычислительной математике
по направлению: Прикладная математика и физика (бакалавриат)
профиль подготовки: Математическое моделирование, вычислительная математика и физика
факультет управления и прикладной математики
кафедра информатики и вычислительной математики
курс: 3
квалификация: бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 6(Весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 45 всего, в том числе:

лекции: 15 час.

практические и семинарские занятия: 0 час.

лабораторные занятия: 30 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Количество курсовых работ, заданий: 4

Программу составил: В.В. Демченко, д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор

Программа обсуждена на заседании кафедры

2 февраля 2018 г.

СОГЛАСОВАНО:

Заведующий кафедрой

И.Б. Петров

Начальник учебного управления

И.Р. Гарайшина

Декан факультета

А.А. Шананин

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

приобретение студентами практических навыков самостоятельного решения задач численного моделирования неоднородных и нелинейных физических процессов.

Задачи дисциплины

- освоение студентами практических навыков (разработка алгоритмов, программирование, отладка программ, решение модельных задач, оценка точности приближённых решений) в области численного решения прикладных задач математического анализа, линейной алгебры, обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений математической физики;
- формирование представлений о методах численного моделирования современных задач физики и оценке точности получаемых результатов.

2. Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Дисциплина "Практикум по вычислительной математике" относится к вариативной части образовательной программы.

Дисциплина «Практикум по вычислительной математике» базируется на дисциплинах:

Вычислительная математика.

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих общекультурных, общепрофессиональных и профессиональных компетенций:

- способность использовать основы философских знаний для формирования мировоззренческой позиции (ОК-1);
- способность анализировать основные этапы и закономерности исторического развития общества для формирования гражданской позиции (ОК-2);
- способность планировать и проводить научные эксперименты (в избранной предметной области) и (или) теоретические (аналитические и имитационные) исследования (ПК-1);
- способность анализировать полученные в ходе научно-исследовательской работы данные и делать научные выводы (заключения) (ПК-2).

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- современные проблемы математики и возможные пути их численного решения;
- численные методы решения современных задач прикладной математики (математического анализа, линейной алгебры, обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений математической физики);
- способы контроля точности получаемых численных результатов.

уметь:

- понять поставленную задачу и выбрать адекватные методы её численного решения;
- правильно оценить функциональные возможности имеющейся вычислительной техники и разработать эффективный алгоритм для математического моделирования;
- реализовать алгоритм в виде программы или пакета сервисных программ на языке программирования высокого уровня для численного моделирования физической проблемы;
- отладить программу и провести её тестирование на модельных задачах, имеющих аналитическое решение;
- осуществить численное моделирование, правильно оценить точность полученных ре-зультатов и представить их в наглядной и доступной для анализа форме.

владеть:

- навыками самостоятельного решения задач численного моделирования;
- техническими средствами разработки и отладки программ;
- методами математически строгой оценки точности полученных результатов.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу				
		Лекции	Практические и семинарские занятия	Лаборат. работы	Задания, курсовые работы	Самост. работа
1	Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).	3		4		7
2	Системы уравнений ОДУ. Задача Коши. Функции и области устойчивости наиболее употребительных разностных схем.	2		5		7
3	Краевые задачи ОДУ.	2		5		7
4	Задачи на собственные значения.	2		5		7
5	Уравнения и системы уравнений с частными производными гиперболического типа.	2		4		7
6	Численные методы решения эллиптических уравнений с частными производными	2		4		5
7	Многомерные уравнения с частными производными параболического типа.	2		3		5
Итого часов		15		30		45
Подготовка к экзамену		0 час.				
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.				

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 6 (Весенний)

1. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).
2. Системы уравнений ОДУ. Задача Коши. Функции и области устойчивости наиболее употребительных разностных схем.
3. Краевые задачи ОДУ.
4. Задачи на собственные значения.
5. Уравнения и системы уравнений с частными производными гиперболического типа.
6. Численные методы решения эллиптических уравнений с частными производными
7. Многомерные уравнения с частными производными параболического типа.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

компьютерный класс и мультимедиапроекторное оборудование (проектор, экран).

6. Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)

Основная литература

1. Упражнения и задачи контрольных работ по вычислительной математике [Текст] : учеб. пособие для вузов / под ред. В. В. Демченко ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— М. : МФТИ, 2013 .— Ч. 1. - 2013. - 143 с.
2. Упражнения и задачи контрольных работ по вычислительной математике [Текст]. Ч. 2 : учеб. пособие для вузов / под ред. В. В. Демченко ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— М. : МФТИ, 2014 .— 182 с.
3. Вычислительный практикум по прикладной математике [Текст] : учеб. пособие для вузов / В. В. Демченко ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— М. : Изд-во МФТИ, 2007 .— 196 с.
4. Введение в вычислительную математику [Текст] : учеб. пособие для вузов / В. С. Рябенкий .— 3-е изд., испр. и доп. — М. : Физматлит, 2008 .— 288 с.
5. Уравнения и системы уравнений с частными производными первого порядка [Текст] : учеб. пособие для вузов / В.В.Демченко .— М. : Изд-во МФТИ, 2001 .— 116с.

Дополнительная литература

1. Разностные схемы. Введение в теорию [Текст] : учеб. пособие для вузов : доп. М-вом высш. и сред. образования СССР / С. К. Годунов, В.С. Рябенький .— 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Наука, 1977 .— 440 с.

2. Методы вычислительной математики [Текст] : учебное пособие для студ.вузов ; доп.М-вом высш.и сред.обр.СССР / Г. И. Марчук .— 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Наука, 1980 .— 536 с.

7. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Студент, изучающий курс «Практикум по вычислительной математике», должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике.

В результате изучения дисциплины студент должен знать математическую теорию соответствующих уравнений и вычислительные алгоритмы для их численного интегрирования.

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы,
- проработку учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе), подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения;
- решение задач, предлагаемых студентам на занятиях и в качестве курсового задания,
- подготовку к занятиям, зачёту.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций.

Показателем владения материалом служит умение решать задачи.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания.

8. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации по итогам обучения

Приложение

**ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ**

по направлению: Прикладные математика и физика (бакалавриат)
профиль подготовки: Математическое моделирование, вычислительная математика и физика
Факультет управления и прикладной математики
кафедра информатики и вычислительной математики
курс: 3
квалификация: бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 6(Весенний) - Дифференцированный зачет

Разработчик: В.В. Демченко, д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Освоение дисциплины направлено на формирование у обучающегося следующих общекультурных (ОК), общепрофессиональных (ОПК) и профессиональных (ПК) компетенций:

- способность использовать основы философских знаний для формирования мировоззренческой позиции (ОК-1);
- способность анализировать основные этапы и закономерности исторического развития общества для формирования гражданской позиции (ОК-2);
- способность планировать и проводить научные эксперименты (в избранной предметной области) и (или) теоретические (аналитические и имитационные) исследования (ПК-1);
- способность анализировать полученные в ходе научно-исследовательской работы данные и делать научные выводы (заключения) (ПК-2).

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Практикум по вычислительной математике» обучающийся должен:

знать:

- современные проблемы математики и возможные пути их численного решения;
- численные методы решения современных задач прикладной математики (математического анализа, линейной алгебры, обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений математической физики);
- способы контроля точности получаемых численных результатов.

уметь:

- понять поставленную задачу и выбрать адекватные методы её численного решения;
- правильно оценить функциональные возможности имеющейся вычислительной техники и разработать эффективный алгоритм для математического моделирования;
- реализовать алгоритм в виде программы или пакета сервисных программ на языке программирования высокого уровня для численного моделирования физической проблемы;
- отладить программу и провести её тестирование на модельных задачах, имеющих аналитическое решение;
- осуществить численное моделирование, правильно оценить точность полученных результатов и представить их в наглядной и доступной для анализа форме.

владеть:

- навыками самостоятельного решения задач численного моделирования;
- техническими средствами разработки и отладки программ;
- методами математически строгой оценки точности полученных результатов.

3. Перечень типовых контрольных заданий, используемых для оценки знаний, умений, навыков

Итоговая аттестация по дисциплине проводится в форме дифференцированного зачёта.

Перечень контрольных вопросов.

1. Дать определение нормы вектора и привести примеры линий единичной нормы в двумерном пространстве.
2. Дать определение нормы матрицы. Привести примеры.
3. Дать определение нормы матрицы, согласованной с нормой вектора.
4. Дать определение нормы матрицы, подчинённой норме вектора.
5. Дать определение положительно определённой матрицы ($A > 0$).
6. Получить выражения для норм матриц, подчинённых векторным нормам:

$$\text{а) } \|\bar{x}\|_1 = \max_i |x_i|; \text{ б) } \|\bar{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}; \text{ в) } \|\bar{x}\|_3 = \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2};$$

$$\text{г) } \|\bar{x}\| = \sqrt{(C\bar{x}, \bar{x})} \quad (C^T = C > 0), \text{ если } AC = CA.$$

7. Получить оценку неустранимой относительной погрешности решения через относительные погрешности в задании матрицы A и вектора \bar{b} для СЛАУ $A\bar{x} = \bar{b}$.
8. Определение разностных уравнений с постоянными коэффициентами.
9. Построение общих решений для неоднородных разностных уравнений с постоянными коэффициентами и с алгебротригонометрической правой частью.
10. Вычислить первые N элементов последовательности:

$$y_0 = \pi / (e + 17); y_1 = \pi / (e + 17); e y_{n+1} + 12 y_n + 5 y_{n-1} = \pi, n = \overline{0, N}; N = 10, 20, 40, \dots, \quad c$$

той же точностью, с какой заданы исходные данные, реализовав алгоритм в виде программы для ЭВМ и осуществив необходимые расчёты. Аналитически получить точные значения элементов последовательности. Чем можно объяснить увеличение погрешности при стремлении $N \rightarrow \infty$? Какая из погрешностей: неустранимая, метода, вычислений, вносит основной вклад в ошибку?

11. Что означает локализовать корень нелинейного уравнения?
12. Какими способами можно локализовать корни нелинейных уравнений?
13. Алгебраические уравнения и использование теорем: Декарта, Бюдана-Фурье, Штурма и следствия из основной теоремы алгебры для локализации корней этих уравнений. Привести формулировки теорем.

14. Локализовать с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$ все действительные корни уравнения:

$$\text{а) } x^4 - 199,997x^3 + 19999,700002x^2 - 1999970x + 99997000,02 = 0;$$

$$\text{б) } x^3 - 1000,03x^2 - 999999,9998x + 1000030000,2 = 0;$$

$$в) x^3 + 1000,03x^2 - 999999,9998x - 1000030000,2 = 0 ;$$

$$г) x^3 - 1000,003x^2 - 9999999,99998x + 1000000300000,02 = 0 .$$

15. Дать определение метрического пространства.
16. Дать определение фундаментальной последовательности.
17. Дать определение полного метрического пространства.
18. Дать определение сжимающего отображения.
19. Сформулировать и доказать теорему принцип сжимающих отображений.
20. Используя теоремы: принцип сжимающих отображений и конечных приращений Лагранжа, получить условие сходимости метода простой итерации для одного нелинейного уравнения в области локализации корня.
21. Дать определение порядка сходимости итерационного процесса.
22. Получить условия достижения заданной точности для метода простой итерации.
23. Сформулировать и доказать теорему о достаточных условиях сходимости итерационного метода Ньютона для одного нелинейного уравнения.
24. Получить условия достижения заданной точности для итерационного метода Ньютона.
25. Получить итерационные формулы для методов высших порядков сходимости ($n > 2$) при решении одного нелинейного уравнения.
26. Найти с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$ все действительные корни уравнения:
 - а) $\exp(1/(1,001 - x^2)) + 1,718281 \cdot 10^{-3} x - 2,715569 = 0 ;$
 - б) $9,9901203 \cdot 10^{-4} x^3 - 0,999011x^2 - 1,000011 \cdot 10^{-3} x + 9,9911094 \cdot 10^{-6} = 0 ;$
 - в) $\sin(x) - \exp(1/(1 - x^2)) = 0 .$
27. Выбрав точку начального приближения, найти с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$ все действительные корни уравнения методом Ньютона:
 - а) $f(x) = \arctan(10^5 x) = 0 ;$
 - б) $f(x) = \arctan(e^x) - 10^{-8} = 0 ;$
 - в) $f(x) = \arctan(10^6 x) + 10^{-8} = 0 ;$
 - г) $f(x) = \arctan(e^x) - \pi/4 = 0 ;$
 - д) $f(x) = \arctan(10^7 x) - 10^{-8} = 0 .$
28. Дать определение обобщённого многочлена.
29. Дать определение системы функций Чебышева.
30. Сформулировать задачу о построении обобщённого интерполяционного многочлена.

31. Сформулировать и доказать теорему о существовании и единственности обобщённого интерполяционного многочлена.
32. Алгебраическая интерполяция. Интерполяционные многочлены в форме Ньютона, Лагранжа, Эрмита.
33. Алгебраическая интерполяция. Получить формулу для остаточного многочлена.
34. Задача построения сплайнов. Кусочно-многочленная интерполяция.
35. Исследовать, используя равномерную сетку и сетку, состоящую из нулей многочлена Чебышева, соответствующего порядка, сходимость в равномерной метрике на отрезке $[-1,1]$ алгебраических интерполяционных многочленов $P_n(x)$ при $n \rightarrow \infty$ к функции $f(x)$:

а) $f(x) = |x|$;

б) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0 \\ e^{1/x}, & \text{если } x > 0 \end{cases}$.

36. Квадратурные формулы Ньютона-Котеса: трапеций, Симпсона. Расчётные формулы и оценка погрешности численного интегрирования.
37. Получить аналитическую оценку ошибки численного интегрирования для метода Симпсона.
38. Метод оценки погрешности вычислений по квадратурным формулам – правило Рунге.
39. Сформулировать и доказать теорему об узлах квадратурной формулы Гаусса.
40. Общие выражения для n узлов, коэффициентов и оценки погрешности квадратурной формулы Гаусса.
41. Построить квадратурную формулу Гаусса с двумя узлами для вычисления интеграла

$$I = \int_{-1}^1 xf(x)dx \quad \text{и} \quad \text{определить} \quad \text{приближённое} \quad \text{значение} \quad \text{интеграла} \quad \text{для}$$

$$f(x) = \sin(\sqrt{5/27} \cdot \pi x).$$

42. Оцените минимальное число узлов, необходимых для вычисления интеграла

$$I = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 \exp(-x^2/2) dx \quad \text{с} \quad \text{точностью} \quad \varepsilon = 10^{-2} \quad \text{методами:} \quad \text{трапеций,} \quad \text{Симпсона} \quad \text{и} \quad \text{квадратур}$$

Гаусса. Вычислите интеграл с заданной точностью и сравните полученные результаты.

43. Вычислить интеграл с погрешностью $\varepsilon = 10^{-6}$, используя методы Ньютона-Котеса и Гаусса с двумя узлами с весовой функцией:

а) $\int_0^{\pi/2} \sin(100x)/(1+x) dx$;

$$\text{б) } \int_0^1 \sin(100x)/(1+x) dx.$$

Чем можно объяснить существенную разность в числе узлов для этих методов?

44. Дать определение аппроксимации разностной схемы.

45. Дать определение устойчивости разностной схемы.

46. Дать определение сходимости разностной схемы.

47. Сформулировать и доказать теорему о связи аппроксимации, устойчивости и сходимости.

48. Способы оценки точности и порядка сходимости численных решений в конечномерных пространствах.

49. Для решения задачи Коши а) на $(0,1)$ предложена разностная схема б). Исследовать разностную задачу на аппроксимацию и определить порядок сходимости её решения к следу решения дифференциальной задачи при $h = 1/L \rightarrow 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{а) } \frac{d^2 y}{dx^2} = -\sin x, x \in [0, 1] \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \text{б) } \frac{y_{l+1} - 2y_l + y_{l-1}}{h^2} = -\sin(hl), l = \overline{1, L-1} \\ y_0 = 0, (y_1 - y_0)/h = 1, x_l = lh, l = \overline{0, L} \end{array} \right\}.$$

50. Для задачи Коши предложить разностный метод. Исследовать сходимость численных решений к следу дифференциальной задачи при стремлении $h = 1/L \rightarrow 0$ или $L \rightarrow \infty$:

$$\left. \begin{array}{l} \text{а) } \frac{dy}{dx} + 10^3 \frac{y - \sqrt{2}}{(x-1)^2} = 0 \\ y(0) = \sqrt{2}; x \in [0, 1] \end{array} \right\};$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{б) } \frac{dy}{dx} + 3 \frac{y - e}{(x-1)^4} = 0 \\ y(0) = e; x \in [0, 1] \end{array} \right\}.$$

4. Критерии оценивания

оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины при ответе билета и ответе на вопросы по программе дисциплины, а также по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов;

оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины при ответе билета и ответе на вопросы по программе дисциплины, а также по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов;

оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему систематизированные, знания учебной программы дисциплины при ответе билета и ответе на вопросы по программе дисциплины, а также по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов;

оценка «хорошо (7)» выставляется студенту по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов, если он твердо знает материал билета, грамотно и по существу излагает его, умеет

применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

оценка «хорошо (6)» выставляется студенту по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов, если он знает материал билета, по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе много неточностей;

оценка «хорошо (5)» выставляется студенту по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов, если он знает материал билета, излагает его, умеет применять полученные знания на практике, не допускает в ответе грубых ошибок;

оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов, а также, если во время ответа билета он показал фрагментарный, характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения;

оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов, а также, если во время ответа билета он показал разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушение логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «неудовлетворительно (2-1)» выставляется студенту по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов, а также, если во время ответа билета, он показал что не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Порядок проведения дифференцированного зачёта:

При проведении дифференцированного зачёта обучающемуся предоставляется 60 минут на подготовку. Опрос обучающегося по билету на устном дифференцированном зачёте не должен превышать двух астрономических часов.

Во время проведения дифференцированного зачёта при подготовке ответов на билеты, обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, конспектами семинаров и любой другой литературой.