

УДК 519.63:550.34

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ ВНУТРИ ПЛАНЕТЫ
С ПОМОЩЬЮ ГИБРИДНОГО
СЕТОЧНО-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО МЕТОДА**

© 2015 г. *В.И. Голубев, И.Б. Петров, Н.И. Хохлов*

Московский физико-технический институт (государственный университет)
w.golubev@mail.ru; petrov@mipt.ru; k_h@inbox.ru

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 14-07-31181 мол_а и гранта Президента РФ МК-3383.2014.9.

Рассматривается задача о распространении сейсмических волн в недрах Земли. Авторами предложен метод численного расчёта динамических процессов, основанный на решении определяющей системы уравнений упругого тела сеточно-характеристическим методом на криволинейных структурных расчётных сетках. Проведена серия расчётов по распространению возмущения, заданного в виде локальной области расширения, в слоистой двумерной модели планеты. Выполнено сравнение волновых картин и характеристик волновых откликов с результатами аналитических расчётов и опубликованными аналогами.

Ключевые слова: глобальная сейсмика, компьютерное моделирование, сеточно-характеристический метод, модель планеты.

**SIMULATION OF SEISMIC PROCESSES INSIDE
THE PLANET USING HYBRID GRID-CHARACTERISTIC METHOD**

V.I. Golubev, I.B. Petrov, N.I. Khokhlov

Moscow Institute of Physics and Technology (State University)

The problem of the seismic wave's propagation in the Earth is studied. Authors proposed a method for numerical simulation of dynamic processes based on the solution of govern system of elastic equations with grid-characteristic method on structural curvilinear meshes. A set of calculations with the elastic perturbation (local extension area) in layered two-dimensional Earth model was carried out. Comparison of wave patterns and characteristics of wave responses with analytical solutions and published analogous results was done.

Key words: global seismic activity, computer simulation, grid-characteristic method, planet model.

1. Введение

Одной из важнейших научно-технических задач, над решением которой уже более 50 лет работают учёные всего мира, является построение детальной модели планеты Земля. Первая современная модель (одномерная, сферически симметричная) была по-

строена в 1940-е годы К.Е. Булленом [1]. По мере накопления сейсмических данных дальнейшим её развитием стали: модель PREM [2], модель IASP91 [3], модель SP6 [4], модель AK135 [5] и модель STW105 [6]. В последние 10 лет были обнаружены неоднородности относительно радиально симметричной модели Земли как вдоль радиуса, так и вдоль угловых направлений [7–9]. Во многом этому способствовало развитие новых методов изучения и интерпретации глобальной сейсмике планеты.

Одной из проблем обработки сейсмических данных является невозможность изменить реальную структуру геологического массива и проанализировать различия в регистрируемом сигнале. Для преодоления этого обстоятельства может быть использовано проведение численных расчётов волновых полей в геологических средах с заданной внутренней структурой. Прямое моделирование глобальной сейсмике всей планеты с построением синтетических сейсмограмм на дневной поверхности может служить проверкой предположений о внутреннем строении планеты или привести к развитию новых технологий обработки сейсмических данных.

Моделированию распространения сейсмических волн в радиально симметричной модели Земли посвящено множество работ [10–13]. Появление высокопроизводительных вычислительных систем позволило также проводить расчёты в моделях, содержащих высокоскоростные неоднородности. В [14] было проведено численное моделирование распространения сейсмических волн в трёхмерной модели Земли PREM. В [15, 16] были проведены аналогичные расчёты, но в двумерной постановке. В [17] изучалось влияние на регистрируемый сигнал наличия локального поднятия в мантии фиксированной протяжённости. Отметим, однако, что в [15–17] рассматривалось распространение волн лишь в мантии, без учёта внешнего ядра Земли. Это обусловлено использованием полярной расчётной сетки, которая стужается вблизи начала координат и содержит особенность в центре. При этом на границе мантии с внешним ядром использовалось дополнительное искусственное граничное условие.

Усложнение моделей строения планеты, а также необходимость повышения точности численных расчётов привело к развитию новых подходов к компьютерному моделированию динамических процессов. В [18] был использован метод Direct Solution Method (DSM) [19] для расчёта распространения сейсмических волн в модели IASP91 при наличии скоростных неоднородностей в верхней части мантии. Метод Spectral Element Method [20] был применён для моделирования распространения сейсмических волн в радиально симметричной модели Земли в [21, 22]. Спектральный метод Чебышева был использован в [23] для расчёта распространения волн в радиально симметричной модели Земли в сферических координатах при наличии неоднородностей в верхнем слое мантии. Однако в силу специфики метода расчётная область была ограничена 80 градусами по обоим углам и 5000 км по радиусу. В [24] использовался псевдоспектральный метод для моделирования процессов в неоднородной модели Земли в двумерном случае. Были промоделированы сейсмические процессы вплоть до 5315 км, включая часть внешнего ядра. В дальнейшем в [25] было исследовано влияние наличия случайных скоростных неоднородностей на распространение сейсмических волн. Существенным ограничением стало использование полярной сетки, имеющей сингулярность в начале координат. Таким образом, отсутствовала возможность моделирования прохождения сейсмических волн через внутреннее ядро. В [26] эта проблема была решена, правда, лишь для акусти-

ческого случая. Было выполнено моделирование распространения Р-волны в двумерной радиально симметричной модели Земли. В [27] было проведено моделирование распространения сейсмических волн в двумерной модели Земли, содержащей неоднородности, с использованием псевдоспектрального метода Фурье [28]. Для преодоления проблем, связанных с наличием особой точки в центре, была предложена расширенная схема, модифицирующая процедуру расчёта производной вдоль радиуса. В [29] с использованием неструктурной треугольной сетки был проведён расчёт распространения сейсмических волн в двумерной радиально симметричной модели Земли с использованием метода Arbitrary high order DERivatives (ADER). Поскольку использование данной сетки снимает проблему с особенностью в центре, в расчёте использовалась полная модель Земли, включающая как внешнее, так и внутреннее ядро. Однако в работе не проводился детальный количественный анализ полученных результатов, представлены лишь качественные картины волновых процессов.

В настоящей работе предложен метод численного моделирования распространения сейсмических волн в гетерогенных средах, предназначенный для расчёта глобальных сейсмических процессов в недрах упругой планеты. Он основан на численном решении определяющей системы уравнений упругого тела сеточно-характеристическим методом повышенного порядка точности [30–34] на криволинейных структурных расчётных сетках. Использование набора склеенных сеток, покрывающих область моделирования, позволяет преодолеть проблему с расчётом распространения волн через внутреннее ядро без введения искусственных граничных условий. В работе приведены результаты серии расчётов распространения возмущения, заданного в виде локальной расширяющейся области, в радиально симметричной слоистой модели Земли в двумерной постановке. Проведено сравнение результатов компьютерного моделирования с результатами аналитических расчётов и опубликованными аналогами.

2. Постановка задачи и методика расчёта

Авторами исследовалось распространение сейсмических волн в пятислойной двумерной радиально симметричной модели Земли. Характеристики слоёв приведены в табл.1. Зависимости плотности среды и скоростей распространения упругих волн от радиуса были взяты из модели PREM [2].

Таблица 1. Характеристики слоёв в двумерной модели Земли.

Номер слоя	Внешний радиус, км	Внутренний радиус, км	Плотность, кг/м ³	Скорость продольных волн, км/с	Скорость поперечных волн, км/с
1	6370	5870	4000	5	3
2	5870	5370	4000	10	5.1
3	5370	3000	5000	13	6.5
4	3000	1000	11000	9	0.1
5	1000	0	12000	10.2	3.5

Для описания состояния бесконечно малого объёма линейно упругой среды используются уравнения линейной динамической теории упругости:

$$\begin{aligned} \rho \cdot \dot{v}_i &= \nabla_j \cdot \sigma_{ij}, \\ \dot{\sigma}_{ij} &= q_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} + F_{ij}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ρ – плотность среды, v_i – компоненты вектора скорости смещения, σ_{ij} и ε_{kl} – компоненты тензоров напряжений Коши и деформаций, ∇_j – ковариантная производная по j -й координате, F_{ij} – добавочная правая часть. Вид компонент тензора 4-го порядка q_{ijkl} определяется реологией среды. Для линейно упругого случая они имеют вид:

$$q_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}).$$

В этом соотношении, которое обобщает закон Гука, λ и μ – параметры Ляме, а δ_{ij} – символ Кронекера.

Первое векторное уравнение в системе (1) представляет два уравнения движения, второе – три реологических соотношения. Вектор искомых функций, состоящий из пяти компонент, имеет вид

$$\mathbf{u} = \{v_1, v_2, \sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}\}^T.$$

Система (1) не имеет в общем случае аналитического решения. Поэтому в настоящей работе она решается численно с использованием сеточно-характеристического метода. Расчётная область, представляющая собой круг фиксированного радиуса, покрывается узлами сетки, в которых вычисляются значения вектора искомых функций. Отметим, что попытка покрытия её одной структурной криволинейной сеткой приводит к тому, что часть элементов имеет размер в сотни и тысячи раз ниже, чем средний размер всех элементов. Поскольку данное обстоятельство резко снижает максимально допустимый временной шаг и значительно увеличивает время расчёта, авторами была предложена и использована процедура покрытия круга пятью граничными структурными криволинейными сетками-секторами. При этом на каждом временном шаге происходит корректировка значений в соответствующих узлах сеток для согласования значений в них.

Исходная система уравнений (1) может быть записана в виде [33]

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \sum_{j=1}^2 \tilde{\mathbf{A}}_j \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_j},$$

где (ξ_1, ξ_2) – криволинейные координаты. После проведения расщепления по направлениям на каждом временном шаге необходимо решить систему:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \tilde{\mathbf{A}}_j \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_j} = \mathbf{\Omega}_j^{-1} \mathbf{\Lambda}_j \mathbf{\Omega}_j \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_j}, \quad (2)$$

где $\mathbf{\Lambda}_j$ (диагональная матрица, элементами которой являются собственные значения) имеет вид

$$\mathbf{\Lambda}_j = \text{diag} \left\{ l_j \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, -l_j \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, l_j \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, -l_j \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, 0 \right\}.$$

Здесь $l_j = |w^j| = \sqrt{(w_1^j)^2 + (w_2^j)^2}$, а $w^j = \nabla \cdot \xi_j$. После замены переменных $\mathbf{v} = \mathbf{\Omega} \mathbf{u}$ система (2) распадается на независимые уравнения переноса вида

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \xi_j} = 0.$$

Для его решения использовалась схема 4-го порядка точности:

$$\begin{aligned} v_m^{n+1} &= v_m^n - \sigma(\Delta_1 - \sigma(\Delta_2 - \sigma(\Delta_3 - \sigma\Delta_4))), \\ \Delta_1 &= \frac{1}{24}(-2v_{m+2}^n + 16v_{m+1}^n - 16v_{m-1}^n + 2v_{m-2}^n), \\ \Delta_2 &= \frac{1}{24}(-v_{m+2}^n + 16v_{m+1}^n - 30v_m^n + 16v_{m-1}^n - v_{m-2}^n), \\ \Delta_3 &= \frac{1}{24}(2v_{m+2}^n - 4v_{m+1}^n + 4v_m^n - 2v_{m-2}^n), \\ \Delta_4 &= \frac{1}{24}(v_{m+2}^n - 4v_{m+1}^n + 6v_m^n - 4v_{m-1}^n + v_{m-2}^n) \end{aligned}$$

с гибридизацией на основе сеточно-характеристического критерия монотонности

$$\min\{v_m^n, v_{m-1}^n\} \leq v_m^{n+1} \leq \max\{v_m^n, v_{m-1}^n\}.$$

При его невыполнении применялась корректировка вида

$$v_m^{n+1} = \begin{cases} \max\{v_m^n, v_{m-1}^n\}, & v_m^{n+1} > \max\{v_m^n, v_{m-1}^n\}, \\ \min\{v_m^n, v_{m-1}^n\}, & v_m^{n+1} < \min\{v_m^n, v_{m-1}^n\}, \\ v_m^{n+1}, & \min\{v_m^n, v_{m-1}^n\} \leq v_m^{n+1} \leq \max\{v_m^n, v_{m-1}^n\}. \end{cases}$$

После того как все компоненты \mathbf{v} перенесены, восстанавливается само решение:

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{v}^{n+1}.$$

Необходимо отметить, что предложенный метод расчёта легко обобщается на трёхмерный случай. Область интереса (шар) в этом случае может быть покрыта семью криволинейными структурными сетками. Однако, в силу резкого возрастания числа узлов, происходит значительное увеличение времени расчёта, которое должно быть компенсировано интенсивным использованием технологий параллельных вычислений (MPI и OpenMP).

3. Примеры расчётов

На первом этапе исследования была проведена серия расчётов с изменением параметров модели планеты: радиуса внутреннего ядра и скорости распространения продольных волн в нём. В качестве начального возмущения использовалась модель радиально расширяющегося кольца. Глубина залегания составляла 870 км, внешний радиус – 500 км, внутренний радиус – 100 км, начальная скорость – 1 м/с. Расчётная сетка состоя-

ла из ~ 1 млн узлов, а минимальный размер ячейки составлял 15 км. Целью данной серии численных экспериментов являлось сравнение времени прохода продольной волны вдоль главного диаметра планеты, вычисленного аналитически и полученного из анализа синтетической сейсмотрассы. Известно, что в случае совокупности однородных бесконечных упругих плоских слоёв задача о распространении продольной волны, распространяющейся вдоль нормали к ним, может быть решена аналитически. В ходе прямого моделирования существует возможность непосредственной регистрации первого вступления на противоположной (от источника) стороне планеты, и представляется любопытным проведение сравнения аналитических и численных оценок. Поскольку при фиксированных характеристиках и размерах слоёв может быть рассчитано лишь одно время первого вступления, решено было провести серию расчётов с изменением параметров модели в широком диапазоне.

Сначала рассматривался случай изменения скорости распространения продольных волн во внутреннем ядре Земли (слой № 5 в нашей модели). Исследовался диапазон значений от 8 до 12 км/с с шагом 500 м/с. На противоположной (от взрыва) поверхности Земли располагался сейсмоприёмник, регистрирующий вертикальную составляющую скорости смещения среды. По его записям производилось пикирование первого вступления продольной волны и измерялось время её прихода. В случае набора параллельных слоёв время прихода определяется соотношением:

$$T_{arrival} = \text{const} + \frac{2R_{inner}}{C_{inner}},$$

где R_{inner} – радиус внутреннего ядра, C_{inner} – скорость распространения продольных волн во внутреннем ядре.

По результатам численного моделирования была построена зависимость времени прихода продольной волны от скорости распространения продольных волн во внутреннем ядре (см. рис.1). Наиболее близкая к экспериментальным данным прямая имеет коэффициент наклона 1874км, что с точностью 7% совпадает со значением $2R_{inner} = 2000\text{км}$.

В дальнейшем был рассмотрен случай изменения радиуса внутреннего ядра Земли. Отметим, что при увеличении толщины слоя № 5 происходит, соответственно, уменьшение толщины слоя № 4 на такую же величину. Расчёты проводились для диапазона значений параметра от 0 до 3000 км с шагом 500 км. Аналогично описанной выше процедуре, производилась регистрация времени первого вступления на противоположной стороне планеты. Для случая параллельных упругих слоёв имеем аналитическую зависимость:

$$T_{arrival} = \text{const} - 2R_{inner} \times \left(\frac{1}{C_{outer}} - \frac{1}{C_{inner}} \right),$$

где R_{inner} – радиус внутреннего ядра, C_{inner} – скорость распространения продольных волн во внутреннем ядре, C_{outer} – скорость распространения продольных волн во внешнем ядре.

По результатам компьютерного моделирования была построена зависимость времени первого вступления от радиуса внутреннего ядра (см. рис.2). Наиболее близкая к

экспериментальным данным прямая имеет коэффициент наклона -0.0274 с/км, что с точностью 5 % совпадает с аналитическим значением -0.0261 с/км.



Рис.1. Зависимость времени первого вступления от скорости распространения продольных волн во внутреннем ядре.

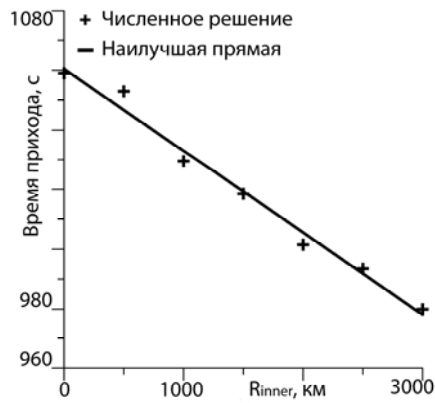


Рис.2. Зависимость времени первого вступления от радиуса внутреннего ядра Земли.

Кроме того, было проведено сравнение результатов численного расчёта с результатами, опубликованными в [29]. К сожалению, авторы не привели деталей вычислительного эксперимента: используемую скоростную модель Земли, параметры начального возмущения, способ отображения волновых картин. В наших расчётах также использовался источник возмущения, описанный ранее. На рис.3 приведены волновые картины (модуль скорости в градации серого), построенные по вычисленным полям скоростей, нормированным на максимум сигнала, в последовательные моменты времени. Наблюдается качественное совпадение результатов с результатами работы [29]: наличие отражений от границ внутреннего и внешнего ядра, изгибы волнового фронта при прохождении через неоднородную среду. Некоторые расхождения могут быть вызваны различием в используемых моделях начального возмущения и строения планеты.

Необходимо также отметить, что предлагаемый метод расчёта на структурных сетках должен превосходить по скорости метод расчёта на неструктурных треугольных сетках за счёт отсутствия поиска соседних узлов в расчётном шаблоне. Поскольку данные о времени работы программы в [29] не были опубликованы, отсутствует возможность проведения непосредственного сравнения.

4. Выводы

В работе предложен метод моделирования распространения сейсмических волн в упругой модели Земли на структурных криволинейных сетках. При этом для преодоления проблемы с сильным уменьшением размеров элементов, получаемых при покрытии круга одной сеткой, предложено использование совокупности структурных сеток с общими границами. Данный подход позволяет производить расчёты распространения волн в недрах Земли на модели, включающей как внешнее, так и внутреннее ядро. Для описания динамических процессов в среде используется система уравнений гиперболического типа линейно упругого тела. Численное решение производится с использованием сеточно-характеристического метода.

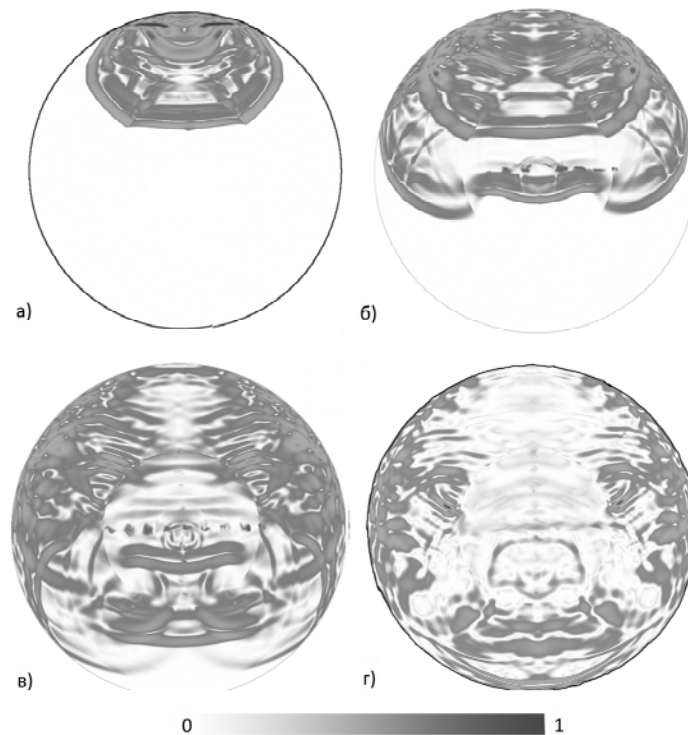


Рис.3. Распределение модуля скорости в модели Земли в последовательные моменты времени: 300 с (а), 600 с (б), 900 с (в), 1200 с (г) от начала расчёта.

Авторами проведено сравнение с аналитическим решением для случая параллельных однородных слоёв, подтвердившее правильность расчёта распространения продольной волны вдоль главного диаметра планеты. Незначительное количественное отклонение вероятно связано с отличием радиуса кривизны границы между соседними слоями от нуля в численном эксперименте. Также было проведено моделирование распространения упругих волн из центра расширения в двумерной слоистой модели Земли PREM [2]. Показано качественное совпадение результатов численных расчётов с результатами, полученными другими исследователями с использованием неструктурных треугольных сеток [29]. Имеющиеся различия могут быть объяснены несовпадением используемых моделей планеты и начального возмущения, а также особенностью визуализации результатов.

Поскольку одним из естественных источников сейсмических волн в недрах Земли является очаг землетрясения, представляется перспективным проведение численного решения задачи глобальной сеймики с данным источником. В [33, 34] предложена механико-математическая модель гипоцентра землетрясения вида «подвижка по разлому» как для двумерного, так и для трёхмерного случая. В них также проведено моделирование сейсмических процессов в ограниченных геологических массивах, в том числе многослойных. Дальнейшим направлением исследования авторы видят расширение идей указанных работ на задачу глобальной сеймики, а также переход к полной трёхмерной постановке задачи, который будет обеспечен распараллеливанием вычислительных алгоритмов для многосеточной геометрии с использованием технологий MPI и OpenMP.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *H. Jeffreys and K.E. Bullen.* Seismological Tables, British Association for the Advancement of Science. – London: Burlington House, 1940.
2. *A.M. Dziewonski, D.L. Anderson.* Preliminary reference Earth model // *Phys. Earth Planet. Inter.*, 1981, v.25, p.297–356.
3. *B.L.N. Kennett, E.R. Engdahl.* Traveltimes for global earthquake location and phase identification // *Geophysical Journal International*, 1991, v.105(2), p.429–465.
4. *A. Morelli, A.M. Dziewonski.* Body-wave traveltimes and a spherically symmetric P- and S-wave velocity model // *Geophysical Journal International*, 1993, v.112(2), p.178–184.
5. *B.L.N. Kennett, E.R. Engdahl, R. Buland.* Constraints on seismic velocities in the Earth from traveltimes // *Geophysical Journal International*, 1995, v.122(1), p.108–124.
6. *B. Kustowski, G. Ekstrom, A.M. Dziewonski.* Anisotropic shear-wave velocity structure of the Earth's mantle: A global model // *Journal of Geophysical Research*, 2008, v.113, B06306.
7. *M.A.H. Heldin, P.M. Shearer, P.S. Earle.* Seismic evidence for small-scale heterogeneity throughout the Earth's mantle // *Nature*, 1997, v.387, p.145–150.
8. *T. Lay, Q. Williams, E.J. Garnero.* The core-mantle boundary layer and deep Earth dynamics // *Nature*, 1998, v.392, p.461–468.
9. *P.R. Cummins, N. Takeuchi, R.J. Geller.* Computation of complete synthetic seismograms for laterally heterogeneous models using the Direct Solution Method // *Geophys. J. Int.*, 1997, v.130(1), p.1–16.
10. *Z.S. Alterman, J. Aboudi, F.C. Karal.* Pulse propagation in a laterally heterogeneous solid elastic sphere // *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 1970, v.21(3), p.243–260.
11. *X. Li, T. Tanimoto.* Waveforms of long-period body waves in a slightly aspherical Earth model // *Geophys. J. Int.*, 1993, v.112(1), p.92–102.
12. *M.E. Wysession, P.J. Shore.* Visualization of whole mantle propagation of seismic shear energy using normal mode summation // *Pure appl. Geophys.*, 1994, v.142(2), p.295–310.
13. *W. Friederich, J. Dalkolmo.* Complete synthetic seismogram for a spherically symmetric earth by a numerical computation of the Green's function in the frequency domain // *Geophys. J. Int.*, 1995, v.122(2), p.537–550.
14. *K.-H. Yoon, G.A. McMechan.* Simulation of long-period 3-D elastic responses for whole earth models // *Geophys. J. Int.*, 1995, v.120(3), p.721–730.
15. *H. Igel, M. Weber.* SH-wave propagation in the whole mantle using high-order finite differences // *Geophys. Res. Lett.*, 1995, v.22(6), p.731–734.
16. *H. Igel, M. Weber.* P-SV wave propagation in the Earth's mantle using finite differences: application to heterogeneous lowermost mantle structure // *Geophys. Res. Lett.*, 1996, v.23(5), p.415–418.
17. *E. Chaljub, A. Tarantola.* Sensitivity of SS precursors to topography of the upper-mantle 660-km discontinuity // *Geophys. Res. Lett.*, 1997, v.24(21), p.2613–2616.
18. *P.R. Cummins, N. Takeuchi, R.J. Geller.* Computation of complete synthetic seismograms for laterally heterogeneous models using the Direct Solution Method // *Geophys. J. Int.*, 1997, v.130(1), p.1–16.
19. *R.J. Geller, T. Ohminato.* Computation of synthetic seismograms and their partial derivatives for heterogeneous media with arbitrary natural boundary conditions using the Direct Solution Method // *Geophys. J. Int.*, 1994, v.116 (2), p.421–446.
20. *D. Komatitsch, J.P. Vilotte.* The spectral element method: an efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures // *Bull. seism. Soc. Am.*, 1998, v.88(2), p.368–392.
21. *E. Chaljub, J.P. Vilotte.* 3D wave propagation in a spherical Earth model using the spectral element method // *EOS, Trans. Am. Geophys.*, 1998, v.79, p.625–626.
22. *Y. Capdeville, E. Chaljub, J.P. Vilotte, J. Montagner.* A hybrid numerical method of the spectral element method and the normal modes for realistic 3D wave propagation in the Earth // *EOS, Trans. Am. Geophys. Un.*, 1999, v.80, p.698–708.

23. *H. Igel*. Wave propagation in three-dimensional spherical sections by the Chebyshev spectral method // *Geophys. J. Int.*, 1999, v.136(3), p.559–566.
24. *T. Furumura, B.L.N. Kennett, M. Furumura*. Seismic wavefield calculation for laterally heterogeneous whole earth models using the pseudospectral method // *Geophys. J. Int.*, 1998, v.135(3), p.845–860.
25. *M. Furumura, B.L.N. Kennett, T. Furumura*. Seismic wavefield calculation for laterally heterogeneous earth models-II. The influence of upper mantle heterogeneity // *Geophys. J. Int.*, 1999, v.139(3), p.623–644.
26. *Ch. Thomas, H. Igel, M. Weber, F. Scherbaum*. Acoustic simulation of P-wave propagation in a heterogeneous spherical earth: numerical method and application to precursor waves to PKPdf // *Geophys. J. Int.*, 2000, v.141(2), p.307–320.
27. *Y. Wang, H. Takenaka, T. Furumura*. Modelling seismic wave propagation in a two-dimensional cylindrical whole-earth model using the pseudospectral method // *Geophys. J. Int.*, 2001, v.145(3), p.689–708.
28. *D. Kosloff, E. Baysal*. Forward modeling by a Fourier method // *Geophysics*, 1982, v.47(10), p.1402–1412.
29. *E.F. Toro, M. Kaeser, M. Dumbser, C.C. Castro*. ADER shock-capturing methods and geophysical applications // *Proceedings of the 25th International Symposium on Shock Waves, ISSW25, Bangalore India, 17–22 July, 2005*.
30. *К.М. Магомедов, А.С. Холодов*. Сеточно-характеристические численные методы. – М.: Наука, 1988, 288 с.;
К.М. Magomedov, A.S. Kholodov. Setochno-kharakteristicheskie chislennye metody. – М.: Nauka, 1988, 288 p.
31. *И.Б. Петров, А.В. Фаворская, А.В. Санников, И.Е. Квасов*. Сеточно-характеристический метод с использованием интерполяции высоких порядков на тетраэдральных иерархических сетках с кратным шагом по времени // *Математическое моделирование*, 2013, т.25, №2, с.42–52; англ. пер.: *I.B. Petrov, A.V. Favorskaya, A.V. Sannikov, and I.E. Kvasov*. Grid-Characteristic Method Using High-Order Interpolation on Tetrahedral Hierarchical Meshes with a Multiple Time Step // *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2013, v.5, №5, s.409–415.
32. *И.Е. Квасов, С.А. Панкратов, И.Б. Петров*. Численное моделирование сейсмических откликов в многослойных геологических средах сеточно-характеристическим методом // *Математическое моделирование*, 2010, т.22, №9, с.13–21; англ. пер.: *I.E. Kvasov, S.A. Pankratov, I.B. Petrov*. Numerical simulation of seismic responses in multilayer geologic media by the grid-characteristic method // *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2011, v.3, №2, p.196–204.
33. *В.И. Голубев, И.Б. Петров, Н.И. Хохлов*. Численное моделирование сейсмической активности сеточно-характеристическим методом // *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 2013, т.53, №10, с.1709–1720; англ. пер.: *V.I. Golubev, I.B. Petrov, N.I. Khokhlov*. Numerical simulation of seismic activity by the grid-characteristic method // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2013, v.53, №10, p.1523–1533.
34. *В.И. Голубев, И.Е. Квасов, И.Б. Петров*. Воздействие природных катастроф на наземные сооружения // *Математическое моделирование*, 2011, т.23, №8, с.46–54; англ. пер.: *V.I. Golubev, I.E. Kvasov, I.B. Petrov*. Influence of natural disasters on ground facilities // *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2012, v.4, №2, p.129–134.

Поступила в редакцию 15.01.2014.