

Аннотации к лекциям

А. Холодов "Нелинейные вычислительные процессы"

В качестве основного подхода к построению разностных схем для простейших (модельных) уравнений принят известный метод неопределенных коэффициентов (позволяющий рассматривать достаточно обширные семейства схем), дополненный анализом этих семейств в пространствах неопределенных коэффициентов и сеточных функций. Анализ разностных схем в пространстве коэффициентов неопределенных (предложенный А.С.Холодовым в 1978г.) оказался достаточно универсальным и весьма конструктивным средством не только для качественного сравнения различных схем (типа: устойчива – неустойчива, монотонна – немонотонна, первого – второго порядка аппроксимации и т.п.) но, в определенном смысле, и количественного их сопоставления.

Поскольку курс в целом ориентирован на методы решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, характерной чертой которых являются разрывные решения (для уравнений гиперболического типа), области больших градиентов (“пограничные слои”) и т.п., достаточно большое внимание уделено построению монотонных (мажорантных) схем. При переходе от модельных уравнений к линейным системам и нелинейным уравнениям в курсе активно используются характеристические свойства уравнений гиперболического типа и аналогичные методы расщепления для других типов уравнений, интегро-интерполяционный метод (метод интегрального тождества) и другие эффективные способы обобщения схем с сохранением заложенных в модельные схемы свойств.

Лекция 1

Системы уравнений гиперболического типа (СУГТ)

Характеристическая форма уравнений. Дивергентная форма уравнений. Сохранение дивергентной формы при преобразовании независимых переменных. Продолженные (расширенные) системы.

Лекция 2

Постановка краевых условий и примеры систем уравнений гиперболического типа

Постановка краевых условий. Примеры СУГТ – линейное уравнение 2-го порядка, уравнения газовой динамики и др. Их характеристическая и дивергентная формы.

Лекция 3

Разностные схемы для простейшего уравнения переноса

Простейшее уравнение переноса (УП). Разностные схемы для УП в пространстве неопределенных коэффициентов. Условия аппроксимации и устойчивости. Некоторые методы регуляризации численных решений. Примеры простейших разностных схем.

Лекция 4

Критерии монотонности разностных схем

Критерии монотонности разностных схем (Фридрихса, Годунова, Хартена, Ван Лира). Монотонные по Фридрихсу схемы в пространстве неопределенных коэффициентов (схемы с положительной аппроксимацией). Схемы

повышенного порядка аппроксимации для уравнения переноса. Невозможность построения линейных, монотонных по Фридрихсу схем с порядком аппроксимации выше первого (теорема Годунова).

Лекция 5

Схемы высокого порядка аппроксимации

Наименее осциллирующие на разрывах схемы высокого порядка аппроксимации. Гибридные (TVD) схемы. Схемы повышенного порядка аппроксимации для уравнения переноса на нерасширяющихся сеточных шаблонах. Метод параметрической коррекции разностных схем.

Лекция 6

Разностные схемы в пространстве сеточных функций

Монотонные по Ван Лиру схемы повышенного порядка аппроксимации в пространстве сеточных функций. Обобщение критериев монотонности на случай многослойных и неявных сеточных шаблонов. Монотонные по Ван Лиру схемы повышенного порядка аппроксимации для многослойных и нерасширяющихся сеточных шаблонов.

Лекция 7

Обобщение разностных схем для одномерных гиперболических систем уравнений

Обобщение разностных схем для уравнения переноса на случай квазилинейной системы уравнений гиперболического типа. Консервативные схемы.

Лекция 8

Обобщение разностных схем на многомерный случай

Решение сеточных уравнений в случае неявных схем. Обобщение разностных схем для квазилинейной системы уравнений гиперболического типа на многомерный случай. Методы расщепления по пространственным переменным в случае канонической области интегрирования. Методы на неструктурированных сетках для решения в сложных, в том числе многосвязных областях.

Лекция 9

Квазилинейные параболические уравнения и системы

Расщепление по "физическим процессам". Примеры: автомодельная задача о бегущей волне, одномерные уравнения Навье–Стокса. Постановка краевых задач. Разностные схемы для простейшего уравнения теплопроводности. Условия аппроксимации и устойчивости.

Лекция 10

Разностные схемы для простейшего уравнения теплопроводности

Разностные схемы для простейшего уравнения теплопроводности в пространстве неопределенных коэффициентов. Монотонные схемы (схемы с положительной аппроксимацией) с порядком аппроксимации $O(dt, dr^2)$ и $O(dt^2, dr^2)$. Обобщение разностных схем для уравнения теплопроводности на случай квазилинейных уравнений и систем параболического типа.

Лекция 11

Консервативные схемы для уравнений и систем параболического типа

Обобщение разностных схем для квазилинейной системы уравнений параболического типа на многомерный случай. Методы расщепления по пространственным переменным.

Лекция 12

Методы на неструктурированных сетках

Методы на неструктурированных сетках для решения систем уравнений параболического типа в сложных, в том числе многосвязных областях интегрирования.

Лекция 13

Некоторые численные методы решения краевых задач для эллиптических уравнений

Простейшее уравнение эллиптического типа и его разностные аппроксимации. Схемы с положительной аппроксимацией в случае регулярных и нерегулярных (неструктурированных) сеток.

Лекция 14

Примеры решения модельных и прикладных задач

Системы уравнений гиперболического типа на графах (переходные ударно-волновые процессы в сетях). Примеры сетевых вычислительных моделей: уравнения мелкой воды, интенсивного дорожного движения, электроэнергетических сетей, дыхательной и кровеносной систем человека. Примеры расчетов модельных уравнений различными схемами: явная схема Куранта-Изаксона-Риса и ее консервативные варианты. Схемы П.Лакса, Лакса-Вендроффа, Макормака, Бима-Уорминга, Русанова, трехслойная схема Головизнина. Неявные схемы Карлсона, Ландау-Меймана-Халатникова, Бабенко. Гибридные схемы и схемы со сглаживанием (Федоренко, Бориса - Бука, TVD-схемы). Высокоточные нелинейные монотонные схемы. Некоторые задачи, моделируемые уравнениями магнитогидродинамики, упруго-деформируемых тел и др.