

## Аннотации к лекциям

# И.Б. Петров, А.И. Лобанов "Численные методы решения уравнений в частных производных"

## Лекция 1

### Исследование разностных схем для эволюционных уравнений на устойчивость и сходимость

В лекции рассматриваются методы исследования устойчивости разностных схем для линейных эволюционных уравнений в частных производных (гиперболического и параболического типов) Обсуждается применение спектрального признака устойчивости, энергетического признака, условия Куранта, Фридрихса и Леви для гиперболических уравнений. Формулируется и доказывается теорема (В. С. Рябенского – П. Лакса) о связи аппроксимации, устойчивости и сходимости для линейных разностных схем

- 1.1 Постановка некоторых задач для уравнений математической физики
- 1.2 Основные определения — сходимость, аппроксимация, устойчивость
  - 1.2.1. Основные определения.
  - 1.2.2. Необходимое условие сходимости разностной схемы Куранта, Фридрихса, Леви (условие КФЛ)
- 1.3. Элементы теории устойчивости разностных схем
- 1.4. Задачи
- 1.5. Задачи для самостоятельного решения

## Лекция 2

### Численное решение дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа на примере уравнения теплопроводности

В лекции рассматриваются разностные схемы для решения линейного уравнения теплопроводности, нелинейного уравнения теплопроводности. Приводится пример интегро – интерполяционного метода для построения разностных схем. Отдельно рассматриваются экономичные схемы решения многомерных задач для уравнения теплопроводности — переменных направлений, дробных шагов, Дугласа – Ганна

- 2.1. Постановки задач для уравнений параболического типа
- 2.2. Разностные схемы для численного решения нелинейного уравнения теплопроводности
  - 2.2.1. Неявная схема с нелинейностью на нижнем слое
  - 2.2.2. Схема с нелинейностью на верхнем слое
- 2.3. Разностные схемы для численного решения многомерного уравнения теплопроводности
- 2.4. Исследование сходимости разностных схем для многомерного уравнения теплопроводности
- 2.5. Задачи
- 2.6. Задачи для самостоятельного решения

## Лекция 3

### **Численные методы решения уравнений в частных производных гиперболического типа (на примере уравнения переноса)**

В лекции дается понятие о простейших разностных схемах для решения линейного уравнения переноса. Приводится вид некоторых часто употребляемых схем. Обсуждаются способы конструирования гибридных разностных схем. Обсуждаются вопросы обобщения на квазилинейный случай. Дается первоначальное представление о способах регуляризации решений с большими градиентами. Вводится понятие схем с уменьшением полной вариации (TVD). Рассматриваются основные идеи метода конструирования разностных схем в пространстве неопределенных коэффициентов

- 3.1. Простейшее линейное уравнение переноса
- 3.2. Квазилинейные уравнения гиперболического типа. Характеристики квазилинейных уравнений
- 3.3. Численные методы решения уравнений в частных производных гиперболического типа на примере линейного уравнения переноса
- 3.4. Численные методы решения уравнений в частных производных гиперболического типа для квазилинейного уравнения переноса
- 3.5. Методы регуляризации численных решений с большими градиентами
- 3.6. Гибридные схемы (метод Р.П.Федоренко)
- 3.7. Схемы с уменьшением полной вариации (Total Variation Diminishing, схемы Хартена)
- 3.8. Идеи построения сеточно – характеристических методов и анализ разностных схем в пространстве неопределенных коэффициентов
- 3.9. Задачи
- 3.10. Задачи для самостоятельного решения

### Лекция 4

#### **Введение в методы численного решения уравнений газовой динамики**

Лекция не обязательна при первом прочтении книги. В лекции приводятся некоторые часто употребляемые численные методы решения уравнений газовой динамики. Особое внимание уделено идее конструирования разностных схем из семейства сеточно – характеристических

- 
- 4.1. Формы записи одномерных уравнений газовой динамики
- 4.2. Методы Лакса – Вендроффа и Мак – Кормака
- 4.3. Сеточно – характеристический метод для численного решения уравнений газовой динамики (М. – К.М.Магомедова – А.С.Холодова)
- 4.4. Разностная схема И.М. Гельфанда для численного решения одномерной системы уравнений газовой динамики
- 4.5. Метод частиц в ячейках Харлоу (PIC method: Particle – In – Cell)
- 4.6. Задачи для самостоятельного решения

### Лекция 5

#### **Численное решение уравнений в частных производных гиперболического типа с большими градиентами решений**

Лекция продолжает тему предыдущей лекции и также является необязательной. В ней рассматриваются некоторые идеи, нашедшие свое

применение для построения разностных схем решения задач механики сплошной среды. Рассматриваются способы построения гибридных схем для задач с большими градиентами решения, описываются идеи TVD – и ENO – схем. Вкратце описываются разностные схемы, построенные на основе решения задачи о распаде произвольного газодинамического разрыва (схемы С.К. Годунова)

- 5.1. Потокоская форма представления разностных схем
- 5.2. Гибридные схемы
- 5.3. Гибридные схемы и пространство неопределенных коэффициентов
- 5.4. Метод коррекции потоков Бориса – Бука
- 5.5. TVD – схемы
- 5.6. ENO – схемы
- 5.7. Разностные схемы для квазилинейного уравнения переноса
- 5.8. Однопараметрическое семейство неявных схем
- 5.9. TVD – схемы для квазилинейного уравнения с антидиффузией.
- 5.10. TVD – схемы для линейных систем уравнений гиперболического типа
- 5.11. Метод С.К. Годунова

## Лекция 6

### **Численное решение уравнений в частных производных эллиптического типа на примере уравнений Лапласа и Пуассона**

В лекции разбираются постановка простейшей разностной задачи для уравнений Лапласа и Пуассона в прямоугольной области (схема "крест"). Дается обзор методов решения сеточных уравнений. Вкратце описываются идеи современных методов решения эллиптических уравнений в области произвольной геометрии — многосеточный метод и метод построения мажорантных разностных схем в пространстве неопределенных коэффициентов

- 
- 6.1. Постановка задачи. Простейшая разностная схема "крест". Устойчивость схемы "крест"
- 6.2. Методы решения сеточных уравнений
  - 6.2.1. Метод простых итераций
  - 6.2.2. Метод простых итераций с оптимальным параметром
  - 6.2.3. Чебышёвское ускорение метода простых итераций
  - 6.2.4. Метод переменных направлений
  - 6.2.5. Методы Якоби, Зейделя, верхней релаксации
- 6.3. Попеременно – треугольный итерационный метод
- 6.4. Сводка результатов по итерационным методам решения сеточных уравнений
- 6.5. Основные идеи многосеточного метода Р.П. Федоренко
- 6.6. Построение разностных схем для эллиптических уравнений на нерегулярных сетках. Монотонные схемы (подход А.С. Холодова)
- 6.7 Задачи
- 6.8. Задачи для самостоятельного решения

## Лекция 7

### **Понятие о методах конечных элементов**

Лекция дает первое представление о классе методов конечных элементов. Приводятся вариационная и проекционная постановки задачи. Рассматривается применение МКЭ к стационарным и нестационарным задачам. Вкратце обсуждаются вопросы устойчивости методов конечных элементов при решении нестационарных задач. Рассматривается общая схема применения методов конечных элементов к решению многомерных задач математической физики

- 
- 7.1. Вариационный подход Ритца
- 7.2. Общая схема метода Ритца
- 7.3. Формулировка проекционного метода Галеркина
- 7.4. Пример построения схемы конечных элементов
- 7.5. Построение базисных функций
- 7.6. МКЭ для нестационарных уравнений
- 7.7. Решение нелинейных уравнений с помощью МКЭ
- 7.8. Задачи для самостоятельного решения

## Лекция 8

### Методы расщепления

Лекция знакомит с идеями построения экономичных разностных схем для уравнений математической физики, основанных на методах покомпонентного расщепления (локально – одномерные схемы) и на принципах расщепления по физическим процессам

- 8.1. Понятие о методах расщепления
- 8.2. Метод расщепления первого и второго порядка точности по  $\tau$ 
  - 8.2.1. Локально – одномерные схемы
  - 8.2.2. Схемы Кранка – Никольсон
  - 8.2.3. Общая формулировка методов расщепления
  - 8.2.4. Схемы расщепления для уравнения теплопроводности
- 8.3. Методы двуциклического покомпонентного расщепления
- 8.4. Методы расщепления с факторизацией оператора
  - 8.4.1. Факторизованная схема расщепления
  - 8.4.2. Неявная схема расщепления с приближенной факторизацией
- 8.4.3. Метод "предиктор – корректор"

## Лекция 9

### Применение вариационных принципов для построения разностных схем

В необязательной лекции приводятся примеры использования вариационных принципов Лагранжа и Гамильтона для построения разностных схем на основе вариации дискретного аналога лагранжиана (гамильтониана) системы. В Приложении на примере решения конкретной задачи по проектированию установки рассмотрены основные схемы распараллеливания численных методов

- 
- 9.1. Пример использования принципа наименьшего действия (Гамильтона)
- 9.2. Вариационные схемы для решения задач газовой динамики

- 9.3. Вариационная схема для уравнения теплопроводности на криволинейной сетке
- 9.4. Задачи для самостоятельного решения