



# Пример второй: алгоритмы Маркова

1946 г.

## Обозначения

- ▶ Пусть  $\sigma, \sigma', \alpha, \beta, \beta', \gamma$  - некоторые (возможно и пустые) строки в алфавите  $V$
- ▶ причем  $\sigma = \alpha\beta\gamma$  и  $\sigma' = \alpha\beta'\gamma$
- ▶ Тогда  $\sigma'$  есть результат подстановки  $\beta'$  в строку  $\sigma$  на место строки  $\beta$ .
- ▶ Такая подстановка может быть задана функцией  $f(\sigma, \alpha, \beta, \beta')$
- ▶ Пример:  $\sigma = \text{аааааа}$ ,  $\beta = \text{аа}$ ,  $\beta' = \text{b}$ ,  $\alpha = \text{аа}$

## Нормальная подстановка

- Функция  $f(\sigma, \beta, \beta')$  задаёт **нормальную** подстановку, заменяя **самое левое** вхождение строки  $\beta$  в строку  $\sigma$  на строку  $\beta'$ .
- Пусть  $V = \{a, b, \dots\}$  – основной алфавит,  $V' = \{A, B, \dots\}$  – вспомогательный, причем  $V \cap V' = \emptyset$  и  $\beta, \beta' \in (V \cup V')^*$
- Тогда  $\beta \rightarrow \beta'$  – это простое правило, а  $\beta \rightarrow^i \beta'$  – конечное правило подстановки.

# Нормальный алгоритм Маркова

- Упорядоченное множество подстановок вида  $\beta \rightarrow \beta'$  и  $\beta \rightarrow' \beta'$  называется нормальным алгоритмом Маркова.
- Исполнитель, просматривая слово  $\sigma$  слева направо, пытается последовательно применить к нему правила из множества подстановок. Если ему удастся применить правило вида  $\beta \rightarrow \beta'$ , то процесс повторяется со словом  $\sigma'$ ; если – вида  $\beta \rightarrow' \beta'$  – происходит результирующий останов. Если не удастся применить ни одно из правил – останов не результирующий.

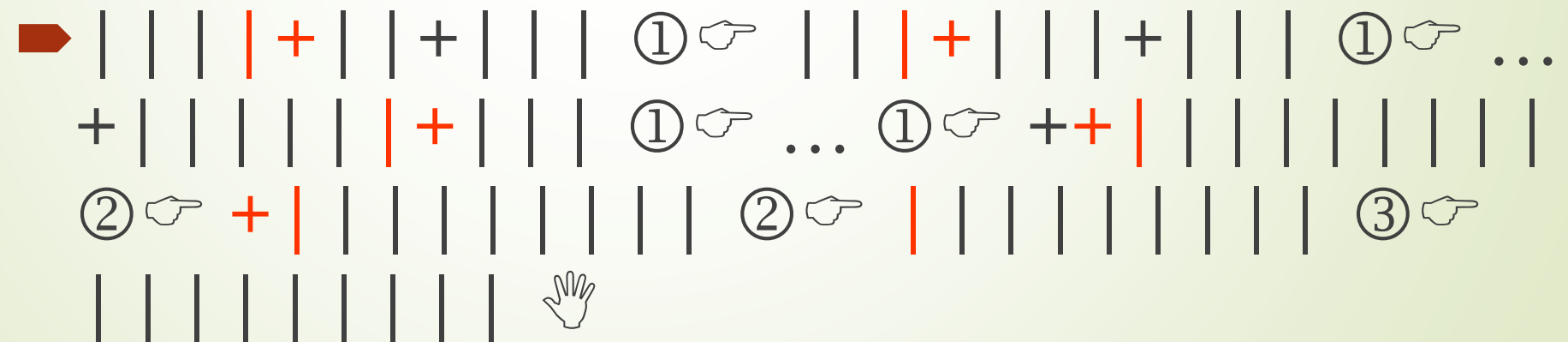
# Пример

➤ Написать алгоритм Маркова для сложения унарных чисел.

➤  $| + \rightarrow + |$  (1)

$+ | \rightarrow |$  (2)

$| \rightarrow |$  (3)



# Композиция алгоритмов Маркова



- ▶ Пусть заданы два алгоритма  $R$  и  $S$ . Задача: построить алгоритм, который будет выполнять  $S(R(\sigma))$ .

▶  $R$ : 

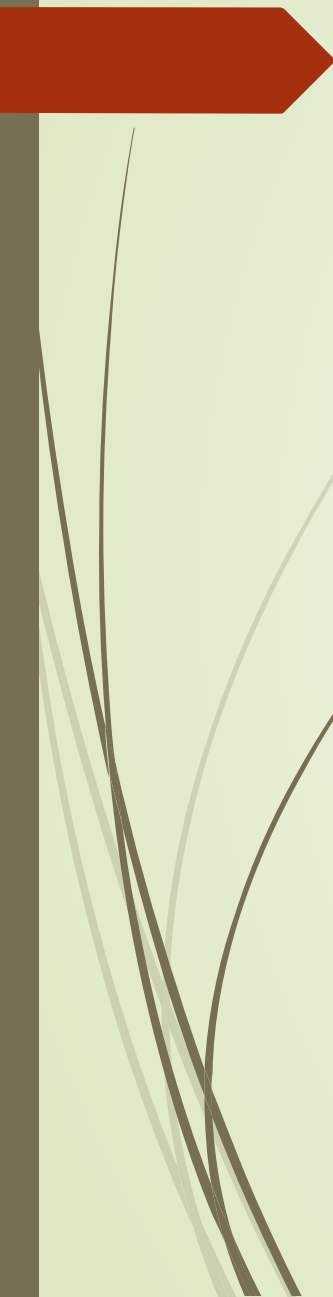
$S$ : 

- ▶ Проблема: заблокировать выполнение подстановок из  $R$  после того, как он отработал, и начал работу алгоритм  $S$ .

## Композиция алгоритмов Маркова

- Удвоим алфавит, добавив для каждого символа алфавита  $\xi$  его близнеца  $\xi'$  и добавим еще два символа  $\alpha$  и  $\beta$ , которые не входили в исходный алфавит.
- $R$ :  конечные правила вида  $\dots \rightarrow \zeta$  заменим на  $\dots \rightarrow \alpha\zeta$ . Обозначим  $R_{\rightarrow \rightarrow \alpha}$
- $S$ :  правила вида  $\dots \rightarrow \zeta$  заменим на  $\dots \rightarrow \beta\zeta$  и  $\forall \xi$  заменим на  $\xi'$ .  $S_{\xi \rightarrow \xi'} \rightarrow \rightarrow \beta$

# Композиция алгоритмов Маркова

- 
- 1
- $\xi\alpha \rightarrow \alpha\xi$   $\forall \xi$ , т.е.  $n$  правил
  - $\alpha\xi \rightarrow \alpha\xi'$  тоже  $n$  правил
  - $\xi'\eta \rightarrow \xi'\eta'$   $n^2$  правил
- 2
- $\xi'\beta \rightarrow \beta\xi'$   $n$  правил
  - $\beta\xi' \rightarrow \beta\xi$   $n$  правил
  - $\xi\eta' \rightarrow \xi\eta$   $n^2$  правил
- 3
- $\alpha\beta \rightarrow \vdash$
- 4
- $S_{\xi \rightarrow \xi', \rightarrow \vdash \rightarrow \beta}$
- 5
- $R_{\rightarrow \vdash \rightarrow \alpha}$



# Пример композиции

R: | 0 → 0 | | ①  
 1 → 0 | ②  
 0 → ③  
 →

S: + → ④  
 → ⑤

1 0 1 + 1 1 ② → 0 | 0 1 + 1 1 ① → 0 0 | | 1 + 1 1 ② → 0 0 | | 0 | + 1 1 ① →  
 0 0 | 0 | | | + 1 1 ① → 0 0 0 | | | | + 1 1 ② → 0 0 0 | | | | + 0 | 1  
 ② → 0 0 0 | | | | + 0 | 0 | ① → 0 0 0 | | | | + 0 0 | | | ③ → ...  
 | | | | | + | | | ④ → | | | | | | | | ⑤ →

# Формальная схема

$$\rightarrow |\alpha \rightarrow \alpha| \quad +\alpha \rightarrow \alpha+$$

$$\alpha| \rightarrow \alpha\underline{|} \quad \alpha+ \rightarrow \alpha\underline{+}$$

$$\underline{|}+ \rightarrow \underline{|}+$$

$$\underline{|}| \rightarrow \underline{|}|$$

$$\underline{+}| \rightarrow \underline{+}\underline{|} \quad \underline{++} \rightarrow \underline{++}$$

$$\rightarrow \underline{|}\beta \rightarrow \beta\underline{|}$$

$$\beta\underline{|} \rightarrow \beta|$$

$$|\underline{|} \rightarrow ||$$

$$\rightarrow \alpha\beta \rightarrow \alpha$$

$$\rightarrow \underline{+} \rightarrow$$

$$\underline{\lambda} = \alpha\lambda \rightarrow \alpha\beta$$

$$\rightarrow |0 \rightarrow 0||$$

$$1 \rightarrow 0|$$

$$0 \rightarrow$$

$$\lambda \rightarrow \alpha$$

11+1 0 | 1+1 0 | 0 | +1 00 | | | +1 00 | | | +0 | 0 | | | +0 | | | | +0 |

|| | + |    α | | | + |

α | | | + |    α | | | + |    α | | | + |    α | | | + |    α | | | + |    α | | | |

αβ | | | |

αβ | | | |    αβ | | | |    αβ | | | |    αβ | | | |    | | | |

# Алгоритм Маркова сложения двоичных чисел

$$\textcircled{1} \beta \underline{1} \rightarrow 1 \beta$$

$$\textcircled{2} \beta \underline{0} \rightarrow 0 \beta$$

$$\textcircled{3} \beta \rightarrow \beta$$

Перевод в унарную форму

$$| 0 \rightarrow 0 | | \textcircled{1}$$

$$1 \rightarrow 0 | \textcircled{2}$$

$$0 \rightarrow \textcircled{3}$$

Сложение

$$+ \rightarrow \textcircled{4}$$

$$| \rightarrow \perp \textcircled{\times}$$

Перевод в двоичный вид

$$\alpha \underline{\perp} \underline{\perp} \rightarrow \underline{\perp} \alpha \textcircled{5}$$

$$\alpha \underline{\perp} \rightarrow \underline{1} \textcircled{6}$$

$$\alpha \rightarrow \underline{0} \textcircled{7}$$

$$\underline{\perp} \rightarrow \alpha \underline{\perp} \textcircled{8}$$

$$\rightarrow \beta \textcircled{9}$$

# Пример

$101 + 111$  ② →  $0 \mid 01 + 111$  ① →  $00 \mid \mid 1 + 111$  ② →  $00 \mid \mid 0 \mid +$   
 $111$  ① →  $00 \mid 0 \mid \mid \mid + 111$  ① →  $000 \mid \mid \mid \mid + 111$  ② →  $000 \mid \mid \mid \mid$   
 $+ 0 \mid 11$  ② →  $000 \mid \mid \mid \mid + 0 \mid 0 \mid 1$  ① →  $000 \mid \mid \mid \mid + 00 \mid \mid \mid \mid$   
 ② →  $000 \mid \mid \mid \mid + 00 \mid \mid 0 \mid$  ② →  $000 \mid \mid \mid \mid + 00 \mid 0 \mid \mid \mid$  ② →  
 $000 \mid \mid \mid \mid + 00 \mid 0 \mid \mid \mid$  ② →  $000 \mid \mid \mid \mid + 000 \mid \mid \mid \mid \mid$   
 ③ → ... ③ →  $\mid \mid \mid \mid + \mid \mid \mid \mid \mid \mid \mid \mid$  ④ →  $\mid \mid \mid \mid \mid \mid \mid \mid \mid \mid \mid \mid \mid$  ⊗ → ...  
 ⊗ →  $\mid \mid \mid \mid \mid \mid \mid \mid \mid \mid \mid$  ⑧ →  $\alpha \mid \mid \mid \mid \mid \mid \mid \mid \mid \mid \mid \mid \mid$  ⑤ →  
 $\mid \alpha \mid \mid \mid \mid \mid \mid \mid \mid$  ⑤ →  $\mid \mid \alpha \mid \mid \mid \mid \mid \mid \mid$  ⑤ →  $\mid \mid \mid \alpha \mid \mid \mid \mid \mid \mid$   
 ⑤ →  $\mid \mid \mid \mid \alpha \mid \mid \mid \mid$  ⑤ →  $\mid \mid \mid \mid \alpha \mid \mid \mid$  ⑤ →  $\mid \mid \mid \mid \alpha$  ⑦ →  
 $\mid \mid \mid \mid \mid 0$  ⑧ →  $\alpha \mid \mid \mid \mid \mid 0$  ⑤ →  $\mid \alpha \mid \mid \mid 0$  ⑤ →  $\mid \mid \alpha \mid \mid 0$  ⑤ →  
 $\mid \mid \mid \alpha 0$  ⑦ →  $\mid \mid \mid 00$  ⑧ →  $\alpha \mid \mid \mid 00$  ⑤ →  $\mid \alpha \mid 00$  ⑥ →  $\mid 100$  ⑧ →  
 $\alpha \mid 100$  ⑥ →  $\mid 100$  ⑨ →  $\beta 1100$  ① →  $1 \beta 100$  ① →  $11 \beta 00$  ② →  $110 \beta 0$   
 ② →  $1100 \beta$  ③ →  $1100$





# Проблема самоприменимости

- Невозможно построить НАМ, который для любого другого НАМ выносил бы решение о том, произойдет или нет останов этого НАМ при его работе над данными, представляющими описание этого НАМ.